

Appunti di Bazzoni

danivolo

Indice

1	Varietà differenziali	2
1.1	Spazi	2
1.2	Mappe	3
1.3	Gruppi discreti	4
1.4	Partizioni dell'unità	5
1.5	Derivate	7
1.6	Sottovarietà	9
1.7	Campi	11
2	Tensori	14
2.1	Prodotto tensore	14
2.2	Tensori antisimmetrici	15
2.3	Dualità	16
2.4	Endomorfismi	17
2.5	Campi	17
2.6	Derivate	18
2.7	Coomologia	21
2.8	Altre derivate	22
2.9	Orientazione	25
2.10	Integrazione	26
3	Geometria riemanniana	28
3.1	Connessioni affini	28
3.2	Metriche riemanniane	32
3.3	La connessione di Levi-Civita	34
3.4	Geodetiche	36
3.5	Curvatura sezionale e forme spaziali	39
4	Geometria simplettica	41
4.1	Algebra lineare	41
4.2	Varietà	43
4.3	L'argomento di Moser	45
4.4	Meccanica hamiltoniana	48

5	Fibrati vettoriali	51
5.1	Definizioni	52
5.2	Somme e prodotti	53
5.3	Funzioni frizione	58
5.4	Il fibrato universale	61
6	Gruppi di Lie	62
6.1	Gruppi, sottogruppi, esponenziale	62
6.2	Algebre e campi invarianti	66

1 Varietà differenziali

1.1 Spazi

Definizione. r_i è la i -esima funzione coordinata di \mathbb{R}^d con una base, e $f_i := r_i \circ f$ è la i -esima componente di f .

Definizione. Ogni punto di uno spazio localmente euclideo di dimensione d ha un intorno omeomorfo ad un'aperto dello spazio euclideo.

Definizione. Una mappa coordinata è un omeomorfismo di un suo aperto connesso su un aperto di \mathbb{R}^d , le sue componenti si dicono funzioni coordinate e (U, φ) è una carta locale. Il suo centro corrisponde all'origine.

Proposizione 1.1. La dimensione non dipende dalla carta locale.

Dimostrazione. Supponendo che lo spazio abbia carte locali che vanno in $\mathbb{R}^{d_1} > \mathbb{R}^{d_2}$, trasportiamo una bolla aperta da \mathbb{R}^{d_1} a \mathbb{R}^{d_2} e poi risvoltiamola con $x \mapsto x/(r - |x|)$. Questo dà una mappa continua e iniettiva da un aperto di \mathbb{R}^{d_2} in \mathbb{R}^{d_1} . Questo contraddice il \square

Teorema 1.1 (Invarianza del dominio). Una mappa continua e iniettiva $f : \mathbb{R}^d \supset U \rightarrow \mathbb{R}^d$ è aperta e omeomorfismo.

Corollario 1.1. Gli aperti di dimensione minore di n non sono omeomorfi ad \mathbb{R}^n .

Dimostrazione. Mettiamo di tornare indietro iniettivamente all'aperto. Componendo con l'immersione "piatta" avremmo una mappa continua e (per assurdo) iniettiva la cui immagine è chiusa se la guardi di lato, assurdo. \square

Definizione. Un atlante C^k su uno spazio localmente euclideo è una collezione massimale di carte locali compatibili che lo ricoprono. Compatibili vuol dire che $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ è C^k come funzione tra spazi vettoriali.

Proposizione 1.2. Ogni "atlante non massimale" genera unicamente un "atlante vero".

Dimostrazione. Aggiungendo tutte le carte locali compatibili che non erano già dentro la collezione continua a ricoprire lo spazio e, appunto, ad essere internamente compatibile. \square

Definizione. Uno spazio secondo numerabile ha una base numerabile. (Una base genera la topologia per unioni)

Definizione. Una varietà differenziale è uno spazio localmente euclideo secondo numerabile con un atlante.

Esempio.

- Lo spazio euclideo con l'atlante generato dall'identità.
- Uno spazio vettoriale (o affine) con “carta globale” che ha come coordinate la base duale.
- \mathbb{C}^n visto come spazio euclideo $2n$ -dimensionale.
- La sfera unitaria con l'atlante generato dalle proiezioni stereografiche ai poli.
- Un aperto di una varietà differenziale con le carte locali ristrette.
- GL come preimmagine di det.
- Il prodotto di varietà con le carte prodotto.
- Le superfici regolari, cioè connessi di \mathbb{R}^3 di cui ogni punto viene coperto da un aperto di \mathbb{R}^2 mappato omeomorficamente sulla sua immagine con una mappa regolare. La carta locale sarebbe l'inversa di questa mappa.

1.2 Mappe

Definizione. Per decidere se una funzione è C^∞ la portiamo indietro a una funzione sulla carta locale. Per decidere se una mappa è C^∞ la portiamo avanti a \mathbb{R} .

Definizione. Un diffeomorfismo è una mappa C^∞ con inversa C^∞ .

Esempio. Questa definizione rende le carte locali diffeomorfismi.

Definizione. Un diffeomorfismo locale da ad ogni punto un intorno diffeomorfo a un intorno della sua immagine.

Esempio. La mappa esponenziale $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ è un diffeomorfismo locale.

Teorema 1.2 (Classificazione delle varietà in alcune dimensioni).

- Dimensione 1: le varietà compatte sono omeomorfe alla sfera, quelle non compatte alla retta.
- Dimensione 2: le varietà compatte orientate sono omeomorfe a sfere con manici, ma anche diffeomorfe, dato che ogni varietà topologica di dimensione ≤ 3 ammette struttura differenziabile unica salvo diffeomorfismi.
- Dimensione 3: le varietà topologiche compatte e semplicemente connesse sono omeomorfe alla sfera.
- Dimensione 4: lo spazio euclideo ammette una quantità non numerabile di strutture differenziabili a due a due non diffeomorfe.
- In generale esistono molte sfere esotiche.

1.3 Gruppi discreti

Lemma 1.1. Con la topologia quoziente la proiezione $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ non è solo continua ma anche aperta.

Dimostrazione. Nella topologia quoziente $\pi(U)$ è aperto se proviene da un aperto. Ma lui proviene da tutti i punti equivalenti a un punto di U , cioè i multipli di punti di U , quindi

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_t tU$$

che è unione di aperti quindi aperta. \square

Proposizione 1.3. Lo spazio proiettivo è una varietà differenziale di dimensione n .

Dimostrazione. L'aperto ottenuto togliendo a \mathbb{R}^{n+1} l'iperpiano $x_i = 0$ è saturato, cioè non ci sono altri punti equivalenti ai suoi punti, quindi π è ancora una mappa quoziente. La carta locale manda una retta nella sua intersezione con l'iperpiano $x_i = 1$. È continua con inversa continua, e due carte così sono compatibili sull'intersezione dei domini.

Per mostrare che lo spazio è Hausdorff, dato che la proiezione è aperta basta far vedere che il grafo della relazione di equivalenza è chiuso. Questo grafo è costituito dalle matrici $2 \times (n+1)$ di rango 1, che è una condizione chiusa.

Lo spazio è secondo numerabile perché la proiezione è aperta e quindi manda basi in basi. \square

Definizione. Un'azione sinistra è un'azione per cui $\vartheta_{\gamma_1} \circ \vartheta_{\gamma_2} = \vartheta_{\gamma_1\gamma_2}$

Esempio. $S^n, \mathbb{Z}^n, \text{GL}(n), \mathbb{R}^*, S^1$.

Definizione. Lo stabilizzatore di un punto è il sottogruppo che lo lascia lì.

Definizione. Un gruppo discreto ha cardinalità numerabile e topologia discreta, generata dai singoletti.

Definizione. Un'azione è C^∞ se le trasformazioni sono diffeomorfismi.

Esempio. \mathbb{Z}_n è discreto e la sua azione per traslazioni è C^∞ .

Esempio. \mathbb{Z}_2 è discreto e l'azione antipodale sulle sfere è C^∞ .

Lemma 1.2. La proiezione sullo spazio delle orbite di un gruppo discreto è aperta.

Dimostrazione. Come con lo spazio proiettivo. \square

Corollario 1.2. Lo spazio delle orbite è secondo numerabile.

Definizione. Un'azione è propria se è C^∞ , lo spazio delle orbite è Hausdorff e ogni punto ha un intorno per cui $\{\gamma \mid \gamma U \cap U \neq \emptyset\}$ è finito.

L'ultima condizione è equivalente a dire che ogni punto ha un intorno che viene stabilizzato dallo stabilizzatore del punto e spedito nel Burundi dal resto del gruppo.

Dimostrazione. Per vedere che la prima formulazione implica la seconda, prendiamo uno intorno per cui quell'insieme A è finito. Lo stabilizzatore del punto sta in A quindi è ancora finito. Ora l'idea è di restringere l'intorno per fare in modo che gli elementi rimanenti lo spediscono nel Burundi. Basta farlo per ciascun elemento singolarmente e poi prendere l'intersezione, che è finita e quindi dà ancora un aperto.

Dato che lo spazio delle orbite è di Hausdorff separo x e $\beta_i x$ con aperti. Per continuità posso restringere l'intorno di x a uno che venga confortevolmente mappato in quello di β_i . \square

Teorema 1.3. Lo spazio delle orbite dell'azione libera e propria di un gruppo discreto su una varietà ha un'unica struttura differenziabile tale che ogni punto ha un intorno connesso con preimmagine decomponibile in sue copie.

Dimostrazione. Manca dimostrare che lo spazio delle orbite è localmente euclideo e costruire un atlante.

Dato che l'azione oltre che essere propria è libera ogni punto ha un intorno $\gamma U \cap U = \emptyset$ che restringendo possiamo supporre connesso e dominio di una carta locale. Questo assicura che la proiezione ristrettavi sia iniettiva e quindi omeomorfismo. Otteniamo una carta locale per il quoziente a partire da una per la varietà componendo con π^{-1} .

Per far vedere che queste carte sono compatibili. Due carte con una parte di dominio comune provengono da carte con domini che, a meno di un'azione, si intersecano, quindi $\varphi \circ \psi^{-1} = \Phi \circ \pi^{-1} \circ \pi(\circ\gamma) \circ \Psi^{-1} = \Phi(\circ\gamma) \circ \Psi^{-1}$ è composizione di mappe C^∞ .

Con questa struttura differenziabile la proiezione ristretta a uno di questi intorni connessi è un diffeomorfismo, e quindi nessun'altra struttura differenziabile è possibile. \square

Esempio. L'azione di \mathbb{Z}^n per traslazioni è libera e propria, con quoziente il toro.

Esempio. L'azione antipodale di \mathbb{Z}_2 sulla sfera è libera e propria, e il quoziente è uno spazio proiettivo.

Esempio. \mathbb{Z}_2 è l'unico gruppo che agisce liberamente su una sfera di dimensione pari. Per sfere dispari invece ci sono gli spazi lenticolari, per esempio $\mathbb{C}^2 \supset S^3/Z_m \subset S^1$

Esempio. Il quoziente del gruppo di Heisenberg continuo per quello discreto, *aka* varietà di Heisenberg.

Nota. Addolcendo i requisiti sull'azione può capitare che lo spazio delle orbite ammetta una struttura di varietà che non ha niente a che fare con lo spazio originale, per esempio il cono $\mathbb{C}/Z_m \subset S^1$ dove l'azione è propria ma non libera.

1.4 Partizioni dell'unità

Definizione. Uno spazio di Hausdorff è localmente compatto se ogni intorno di ogni punto ha un sottointorno compatto.

Definizione. Uno spazio è regolare se i punti sono chiusi e i chiusi posso separarli.

Teorema 1.4 (di metrizzabilità di Urysohn). In uno spazio in cui i punti sono chiusi sono equivalenti

- Regolare e secondo numerabile (n.b. \implies separabile)

- Separabile e metrizzabile (n.b. \implies regolare)

Definizione. Un sottoricoprimento di un ricoprimento è una sottocollezione, mentre un raffinamento è un rimpicciolimento di ciascuna pezza.

Definizione. Una collezione di sottoinsiemi è localmente finita se ogni punto ha un intorno che ne interseca solo un numero finito.

Definizione. Uno spazio è paracompatto se ogni ricoprimento aperto possiede un raffinamento aperto localmente finito.

Lemma 1.3. Ogni spazio di Hausdorff localmente compatto e secondo numerabile è paracompatto. Inoltre ogni ricoprimento aperto possiede un raffinamento numerabile e localmente finito di aperti a chiusura compatta.

Dimostrazione. Costruiamo un'esaustione, ovvero un ricoprimento fatto di una successione di aperti a chiusura compatta tali tali che $\overline{G_i} \subset G_{i+1}$:

La compattezza locale assicura che togliendo a una base gli aperti a chiusura non compatta continuo ad avere una base. Costruiamo l'esaustione a partire da questa base di aperti a chiusura compatta.

- $G_1 = U_1$
- Se ho G_k unione dei primi j_k aperti, continuo ad aggiungere aperti finché non ricopro la sua chiusura e definisco così G_{k+1} .

Ora prendo $\overline{G_{i-2}} \subset G_{i-1} \subset \overline{G_i} \subset G_{i+1}$. Le differenze interne sono compatte (???) e sono contenute nelle rispettive differenze esterne, che sono aperte. Se per $i \geq 3$ interseco un qualsiasi ricoprimento con le differenze esterne ho un ricoprimento aperto delle differenze interne, e se interseco con G_3 uno di $\overline{G_2}$. Un sottoricoprimento finito di questo ricoprimento è numerabile, raffina quello di partenza ed è fatto di aperti a chiusura compatta. \square

Corollario 1.3. Una varietà differenziale è paracompatta.

Definizione. Una partizione dell'unità è una collezione di funzioni C^∞ non negative a supporto localmente finito che partizionano l'unità.

Lemma 1.4. Esiste una funzione non negativa che vale 1 in $[-1, 1]^d$ e si annulla prima di uscire da $(-2, 2)^d$.

Dimostrazione. La costruiamo in una dimensione e poi basta fare il prodotto della funzione applicata a diverse coordinate.

Partendo dalla función meseta

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

$$g(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}$$

$$h(t) = g(t+2)g(2-t)$$

abbiamo prima una funzione C^∞ non negativa, poi una che transiziona tra 0 e 1, poi quella giusta. \square

Teorema 1.5 (Esistenza di partizioni dell'unità).

Good ending: data una varietà differenziale e un ricoprimento aperto esiste una partizione dell'unità numerabile subordinata al ricoprimento fatta di funzioni a supporto compatto.

Bad ending: se non richiedi la compattezza del supporto, esiste partizione dell'unità subordinata al ricoprimento con lo stesso indice con al più un insieme numerabile di funzioni non identicamente nulle.

Dimostrazione. Usiamo ancora l'esauizione di prima aggiungendo $G_0 = \emptyset$.

Scelto un punto prendiamo il G_{i_x} più grande la cui chiusura non lo contiene e un U_{α_x} che lo contiene. Prendiamo poi una carta locale centrata in x che sta sia in U_{α_x} che in $G_{i_x+2} - \overline{G_{i_x}}$ e che mappa a coprire l'ipercubo di lato 4. Consideriamo la funzione che è uguale alla φ del lemma sulla carta e 0 altrove. Questa funzione vale 1 in un intorno W_x di x e ha supporto compatto contenuto nella carta.

Dato che $\overline{G_i} - G_{i-1}$ è compatto, scegliamo per ogni i un insieme finito di punti che lo ricoprono coi loro W_x .

Questo dà una collezione numerabile di funzioni ψ_x . Il fatto che i supporti siano localmente finiti permette di sommare queste funzioni. La partizione dell'unità è fatta delle funzioni normalizzate alla loro somma.

Bad ending: per ogni U_α sommiamo tutte le funzioni che hanno ivi supporto (eventualmente 0). \square

Corollario 1.4. Su una varietà differenziale posso sempre avere una funzione caratteristica C^∞ di un chiuso che si spegne prima di uscire da un suo intorno aperto.

Dimostrazione. Me la dà una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento formato dall'aperto e dal complemento del chiuso. \square

Corollario 1.5. Su una varietà differenziale si possono separare i chiusi con funzioni C^∞ .

1.5 Derivate

Definizione. Due funzioni definiscono lo stesso germe se coincidono su un intorno.

Definizione. Un vettore tangente in un punto è una derivazione lineare della sua algebra dei germi.

Lemma 1.5. Lo spazio tangente ad un punto è il duale dello spazio delle funzioni con zeri semplici.

Dimostrazione. Dato un funzionale lineare su $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ possiamo estenderlo a vettore tangente per simmetria traslazionale. Per far vedere la regola di Leibniz si scompone $\mathbf{f}\mathbf{g} = (\mathbf{f} - \mathbf{f}(p))(\mathbf{g} - \mathbf{g}(p)) + \mathbf{f}\mathbf{g}(p) + \mathbf{g}\mathbf{f}(p) + \mathbf{f}(p)\mathbf{g}(p)$. Il primo termine ha uno zero del secondo ordine e l'ultimo è una costante. \square

Lemma 1.6. Su un aperto convesso di \mathbb{R}^d posso sviluppare una funzione in serie di Taylor con resto integrale così:

$$g(q) = g(p) + \frac{\partial g}{\partial r_i} \Big|_p (r_i(q) - r_i(p)) + (r_i(q) - r_i(p))(r_j(q) - r_j(p)) \int_0^1 dt (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial r_i \partial r_j} \Big|_{p+t(q-p)}$$

e dato che l'integrale è una funzione C^∞ l'ultimo termine ha uno zero del secondo ordine.

Teorema 1.6. Lo spazio delle funzioni con zeri semplici ha la stessa dimensione della varietà.

Dimostrazione. Dato che il termine di secondo ordine sparisce modulo \mathfrak{m}_p^2 abbiamo

$$\mathbf{f} = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \Big|_{\varphi(p)} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i(p))$$

e quindi le funzioni coordinate, appositamente traslate, sono un sistema di generatori per le funzioni a zeri semplici.

Per vedere l'indipendenza una combinazione $a_i \mathbf{x}_i \in \mathfrak{m}_p^2$ ne induce una in una carta locale $a_i \mathbf{r}_i(\varphi(p)) \in \mathfrak{m}_{\varphi(p)}^2$. In \mathbb{R}^d però la sgamiamo subito, perché posso estrarre i coefficienti con le derivate parziali, che sono tutte nulle dato che dovrebbe essere uno zero di ordine 2. \square

Proposizione 1.4. Una base dello spazio tangente, duale a quella sopra, è costituita dalle derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \Big|_{\varphi(p)}$$

e abbiamo

$$v = v(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$$

Definizione. Il differenziale di una mappa in un punto è

$$\begin{aligned} d\psi_p : T_p M &\rightarrow T_{\psi(p)} M \\ d\psi_p(v)(g) &= v(g \circ \varphi) \end{aligned}$$

Trasporta i vettori tangenti nell'unico modo possibile: precompone una funzione con la mappa.

La mappa duale è

$$\begin{aligned} (d\psi_p)^* : T_{\psi(p)}^* M &\rightarrow T_p^* M \\ (d\psi_p)^*(\omega)(v) &= \omega(d\psi_p(v)) \end{aligned}$$

Nel caso particolare di una funzione:

$$df_p(v) = v(f) \frac{d}{dr} \Big|_{r_0}$$

Il gradiente di una funzione è un covettore, infatti se parliamo di df_p stiamo considerando $(df_p)^*(\omega)$

Nota. Scrivere il gradiente in carte locali mi dà la jacobiana:

$$d\psi_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \Big|_p = \frac{\partial(y_i \circ \psi)}{\partial x_j} \Big|_p \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\psi(p)}$$

Per una funzione scalare abbiamo il classico

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p dx_i \Big|_p$$

Nota. Vale la regola della catena $d(\varphi \circ \psi)_p = d\varphi_{\psi(p)} \circ d\psi_p$.

Per una mappa seguita da una funzione scalare

$$d(f \circ \psi)_p(v) = df_{\psi(p)}(d\psi_p(v)) = (d\psi_p)^*(df_{\psi(p)})(v)$$

così che un cambio di coordinate porta indietro il gradiente.

Nota. Quando la mappa è la parametrizzazione di una curva si chiama vettore tangente il vettore tangente a \mathbb{R} trasportato dal differenziale:

$$\sigma'(t) = d\sigma_t \left(\left. \frac{d}{dr} \right|_t \right) \in T_{\sigma(t)}M$$

Ogni vettore tangente è il vettore tangente a una famiglia di curve.

Teorema 1.7. Su una varietà connessa, una mappa con differenziale nullo ovunque è costante.

Dimostrazione. L'annullarsi della jacobiana su un aperto mostra che su di esso le componenti della mappa in una carta locale sono costanti, e quindi un intero aperto viene mappato ad un punto. La preimmagine di questo punto è sia aperta che chiusa, quindi è lo spazio intero. \square

Definizione. I fibrati tangenti e cotangenti sono le unioni di tutti gli spazi tangenti e cotangenti.

Per ottenere carte locali a partire da una carta sulla varietà, dobbiamo estrarre le coordinate di vettori o covettori in modo coerente con la carta.

- Ai vettori applichiamo i differenziali delle coordinate
- I covettori li valutiamo sui vettori coordinati.

I fibrati portano naturalmente una topologia indotta dalla proiezione e possono essere resi varietà generando atlanti a partire da atlanti della varietà di partenza.

Definizione. Possiamo mettere insieme una mappa e il suo differenziale per indurre una mappa tra fibrati tangenti, la mappa tangente.

1.6 Sottovarietà

Definizione. Un'inclusione ψ si dice:

- immersione se ha differenziale iniettivo in ogni punto (non si ferma)
- sottovarietà se è un'immersione iniettiva
- embedding se è una sottovarietà omeomorfa alla sua immagine, dotata della topologia relativa. Parliamo di sottovarietà regolare.

Esempio. Una γ è immersione, un uncino è un'immersione iniettiva, una retta è una sottovarietà regolare.

Teorema 1.8 (della funzione inversa). Se il differenziale di una mappa è isomorfismo in un punto allora è un diffeomorfismo locale.

Dimostrazione. Il teorema lo diamo per buono in \mathbb{R}^d e le carte locali sono diffeomorfismi locali. \square

Definizione. Una collezione di funzioni è un insieme indipendente se i differenziali sono linearmente indipendenti.

Corollario 1.6. Ogni insieme indipendente in un punto, della dimensione della varietà, dà un sistema di coordinate in un suo intorno.

Dimostrazione. La mappa che ha come componenti l'insieme indipendente è C^∞ e il duale del suo differenziale è un isomorfismo per indipendenza, quindi lo è anche il differenziale, e il teorema della funzione inversa garantisce che questa è una carta locale. \square

Corollario 1.7. Ogni insieme indipendente in un punto può essere completato a un sistema di coordinate locali.

Dimostrazione. Aggiungo differenziali di coordinate locali, completa a una base e usa il corollario precedente. \square

Corollario 1.8. Le componenti di una sommersione si possono completare a sistema di coordinate locali.

Dimostrazione. Se il differenziale è suriettivo il suo duale è iniettivo, e allora si vede per la regola della catena che i differenziali delle componenti della sommersione sono un sistema indipendente mandato in un sistema indipendente, così che si usa il corollario precedente. \square

Corollario 1.9. Da un insieme di funzioni i cui differenziali generano lo spazio cotangente ad un punto si può estrarre un sistema di coordinate locali.

Dimostrazione. Basta scegliere un sottoinsieme dei differenziali che forma una base, e si usa il primo corollario. \square

Corollario 1.10. Dalle componenti di un'immersione si può estrarre un sistema di coordinate.

Dimostrazione. Se il differenziale è iniettivo, il suo duale è suriettivo e quindi i differenziali delle componenti generano lo spazio cotangente e si usa il corollario precedente. \square

Teorema 1.9. Una mappa che finisce in una sottovarietà si può tirare indietro a una mappa definita sullo spazio che la parametrizza. La funzione indotta è continua se la sottovarietà è regolare, e se questo succede è anche C^∞ .

Definizione. Una fetta di una carta locale è un sottoinsieme del dominio di una carta locale che è insieme di livello di un certo numero di coordinate.

Teorema 1.10. Ogni punto di un'immersione ha un intorno che è fetta di una carta locale cubica centrata nella sua immagine.

Dimostrazione. Usando l'ultimo corollario estraiamo un sistema di coordinate da un sottoinsieme di componenti dell'immersione. Rinumeriamo in modo che siano le prime $\dim M$, così che abbiamo un sistema di coordinate locali per il punto dopo aver proiettato.

Togliamo alle ultime componenti le loro componenti sulle prime. Le prime le lasciamo invariate. La matrice del cambio di base dei differenziali è triangolare superiore quindi invertibile, e abbiamo ancora un sistema di coordinate. \square

Proposizione 1.5. Se un sottospazio ammette una struttura differenziabile che lo rende sottovarietà con la topologia del sottospazio, allora questa struttura è unica (a prescindere dalla topologia).

Definizione. Un punto è regolare (critico) se la mappa (non) è una sommersione in quel punto. Un valore è regolare (critico) se tutte le sue preimmagini sono regolari (critiche).

Teorema 1.11 (della funzione implicita). Le preimmagini di valori regolari sono sottovarietà regolari.

Dimostrazione. Basta dimostrarlo nella topologia relativa: completiamo le componenti della sommersione a sistema di coordinate locali centrato nel valore, e intersechiamo l'intorno con la preimmagine per ottenere chiaramente una fetta. \square

Corollario 1.11. Lo spazio tangente alla preimmagine è il nucleo del differenziale della sommersione.

Dimostrazione. Dato che $\psi \circ \iota$ è costante su $P \cap U$ abbiamo che $d\psi_m \circ d\iota_m = 0$ e quindi il nucleo del differenziale della sommersione contiene lo spazio tangente, ma hanno la stessa dimensione per nullità + rango. \square

Esempio. La sfera è un insieme di livello della norma. La norma è una sommersione in \mathbb{R} perché il suo differenziale è $2r_i dr_i$, che non è mai nullo. Questo dimostra che la sfera è una sottovarietà regolare e che lo spazio tangente in un punto è costituito dai vettori ortogonali al punto in \mathbb{R}^{n+1} .

Esempio. Il gruppo ortogonale è un insieme di livello della candidata sommersione di GL nelle matrici simmetriche $A \mapsto A^t A$. Per far vedere che il differenziale è ovunque suriettivo basta farlo vedere nell'identità perché questo fatto è invariante per traslazioni (diffeomorfismi).

Il tangente a GL è Mat, mentre Sym è uno spazio vettoriale. Usiamo la curva liscia $I + tB$ definita in un intorno di 0, che rappresenta il vettore tangente B . Se vogliamo trasportarlo nelle simmetriche trasportiamo la curva e valutiamo in 0.

$$d\psi_I(B) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (I + tB)^t (I + tB) = B + B^t$$

e ogni matrice simmetrica si può scrivere così.

Pertanto $\dim O = \dim GL - \dim Sym = n(n - 1)/2$ e l'algebra è composta dalle matrici antisimmetriche.

Definizione. Un sottoinsieme è trascurabile se lo è in ogni carta locale.

Teorema 1.12 (Sard). Una mappa C^∞ ha valori regolari quasi ovunque.

1.7 Campi

Definizione. Una curva liscia la definiamo su un chiuso se è C^∞ su ogni aperto interno. Una curva è liscia a tratti se partizionato il chiuso la curva è liscia sulle partizioni.

Definizione. Un campo vettoriale lungo una curva è una mappa nel fibrato tangente che la solleva.

Definizione. Un campo vettoriale su un aperto è una mappa che solleva l'identità su U , ovvero una sezione del fibrato tangente.

Proposizione 1.6. Sono equivalenti:

1. X è C^∞
2. X componenti C^∞ in ogni carta locale.
3. X manda funzioni C^∞ in funzioni C^∞ .

Dimostrazione. (1) \implies (2): X è una mappa nel fibrato tangente e li posso estrarre le coordinate di un vettore applicandogli i differenziali delle coordinate, e quindi componendo mappe C^∞ . (2) \implies (3): se X è combinazione di campi coordinati stiamo derivando una funzione C^∞ . (3) \implies (1): se voglio estrarre le coordinate posso fare $dx_i \circ X \Big|_U$ che però per definizione è $X(x_i)$ \square

Definizione. La parentesi di Lie di due campi è

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) (\in \mathbb{R})$$

che è ben definita perché le derivate del secondo ordine si cancellano e si ha

$$c_i = \left(a_j \frac{\partial b_k}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right)$$

Proposizione 1.7.

- $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$
- $[Y, X] = [X, Y]$
- $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

Dalle ultime due proprietà segue che i campi vettoriali formano un'algebra di Lie.

Definizione. Un campo vettoriale lungo una mappa è un sollevamento della mappa al fibrato tangente.

Definizione. Due campi sono ψ -correlati se $d\psi \circ X = Y \circ \psi$, che diventa un campo vettoriale lungo ψ .

Proposizione 1.8. Se X_1 è correlato a Y_1 e X_2 è correlato a Y_2 allora $[X_1, X_2]$ è correlato a $[Y_1, Y_2]$.

Dimostrazione. Bisogna giocherellare con la definizione di differenziale:

$$\begin{aligned} d\psi_p([X_1, X_2]_p)(f) &= [X_1, X_2]_p(f \circ \psi) \\ &= X_1(p)(X_2(f \circ \psi)) - \dots \\ &= X_1(p)(d\psi(X_2)(f)) - \dots \\ &= X_1(p)(\tilde{Y}(f) \circ \psi) - \dots \\ &= d\psi_p(X_1(p))(\tilde{Y}(f)) - \dots \\ &= Y_{\psi(p)}(\tilde{Y}(f)) - \dots \\ &= [Y, \tilde{Y}]_{\psi(p)}(f) \end{aligned}$$

\square

Definizione. Le curve che hanno vettore tangente uguale ad un campo si dicono sue curve integrali.

Teorema 1.13. Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \sigma'_i f_i(\sigma_i) \\ \sigma(0) = p \end{cases}$$

dove f è C^1 su un aperto di \mathbb{R}^d ha soluzione in un intorno di 0.

Teorema 1.14. Se f è C^∞ il problema di Cauchy sopra ha soluzione C^∞ che è C^∞ anche come funzione della condizione iniziale.

Teorema 1.15. Ogni campo vettoriale (C^∞) ha curve integrali massimali passanti per ogni punto definite per un intorno di 0. Ogni altra curva integrale passante da un certo punto è definita per tempi più stretti e coincide su questi con la soluzione massimale.

Dimostrazione. Dato che in qualche intorno c'è soluzione per i teoremi sopra, prendiamo l'unione dei domini di curve integrali che passano da un certo punto. Il sottoinsieme sul quale due curve integrali coincidono è almeno il punto da cui passano, è aperto per il primo teorema e chiuso per continuità, quindi per connessione è l'intero intervallo. \square

Definizione. Il flusso di un campo vettoriale per un certo tempo è il diffeomorfismo che trasporta un punto nel punto della curva integrale a quel tempo.

Teorema 1.16.

1. Ogni punto ha un intorno spaziotemporale aperto in cui è definito il flusso.
2. Il dominio di ogni flusso è un insieme aperto.
3. I domini dei flussi ricoprono la varietà.
4. Il dominio per il flusso in una direzione è diffeomorfo a quello per la direzione opposta.
5. Il dominio della composizione di flussi sta nel dominio del flusso risultante, e se i flussi vanno nella stessa direzione questi coincidono proprio. I flussi formano un semigruppato a un parametro.

Dimostrazione. Il punto (a) segue dall'ultimo teorema.

Per il punto (e) basta vedere che tutto quello che deve andare bene va bene.

Il punto (c) segue dal fatto che ogni punto ha il flusso definito in qualche intorno.

Per punti (b) e (d) consideriamo il caso $t > 0$. La compattezza della traccia della curva per $[0, t]$ permette di ricavare a partire dal punto (a) un intorno spaziotemporale della traccia in cui ψ_t è ben definito. Spezzettiamo il tempo in passi uguali più corti della larghezza temporale di questo intorno. Il dominio spaziale del flusso ad ogni passo è costituito dal dominio precedente fluuto nella direzione opposta, quindi tutti i domini fino all'ultimo sono aperti contenuti nel primo dominio. Ripetendo tutta la costruzione al contrario si ricava (d).

\square

Esempio. Sul piano senza l'origine prendiamo il campo ∂_x . Il punto $(-1, 0)$ sta nel dominio di ψ_{-1+1} ma non nel dominio di $\psi_{-1} \circ \psi_1$.

Definizione. Un campo è completo se è ha curve integrali definite per tutti i tempi.

Esempio. In ogni varietà non compatta posso includere differenzialmente la retta reale e considerare il campo $r^2 \frac{d}{dr}$ che non è completo.

Lemma 1.7 (di fuga). Se una curva integrale non esiste per tutti i tempi allora non può essere contenuta in un compatto.

Dimostrazione. Mettiamo che il dominio di una curva sia $(a, b) \subset K$ ed estendiamola.

Una successione $t_n \rightarrow b$ ha una sottosuccessione convergente a $q\sigma_p(q) \in K$, che ha un intorno spaziotemporale $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V$ in cui è definito il flusso.

Prendendo t_n tale che $\sigma_p(t_n) \in V$ e che dista da b meno di ε . Ancorandoci qui possiamo far fluire il campo di $t - t_n$ ed uscire dall'intervallo, ma allora $\psi_{t-t_n} \circ \psi_{t_n} = \psi_t$ per l'ultimo punto del teorema grande. \square

Teorema 1.17. Su una varietà compatta ogni campo è completo.

Definizione. Una varietà è parallelizzabile se ha n campi che fanno da base per tutti gli spazi tangenti, ovvero n campi indipendenti mai nulli.

Esempio. Lo spazio euclideo è parallelizzabile.

Esempio. Posso includere differenzialmente le sfere nello spazio euclideo e identificare lo spazio tangente in un punto con il piano ortogonale.

Un campo mai nullo su $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^{2n}$ è $z \mapsto iz$ che per S^1 è una parallelizzazione.

Allo stesso modo usando le altre 2 algebre di divisioni si parallelizza $S^3 \subset \mathbb{H}$ con $h \mapsto (ih, jh, kh)$ ed $S^7 \subset \mathbb{O}$.

Queste sono le uniche sfere parallelizzabili.

Esempio. S^2 non è parallelizzabile perché non ha campi non nulli per il teorema della palla pelosa.

Esempio. Ogni 3-varietà è parallelizzabile (Stiefel).

2 Tensori

2.1 Prodotto tensore

Definizione. $V \otimes W$ è lo spazio generato dagli elementi di $V \times W$ modulo relazioni di bilinearità. Questa proiezione è una mappa bilineare.

Teorema 2.1 (Proprietà universale del prodotto tensore). Mappa bilineare = “proiezione bilineare” + mappa lineare sul tensore. Ogni spazio con questa proprietà è isomorfo a $V \otimes W$.

Dimostrazione. Boh la prima parte più ci penso più è ovvio, poi se fattorizzo la proiezione canonica di uno di questi spazi sull'altro e viceversa ottengo un isomorfismo. \square

Corollario 2.1.

- $\text{Bil}(V, W) \cong (V \otimes W)^*$
- $V \otimes W \cong W \otimes V$
- $(V \otimes W) \otimes U \cong V \otimes (W \otimes U)$

Proposizione 2.1. $V^* \otimes W \cong \text{Hom}(V, W)$

Dimostrazione. Per descrivere una mappa lineare basta una base duale sullo spazio di partenza, che estrae le coordinate dei vettori, e una base sullo spazio di arrivo. \square

Corollario 2.2.

- $\dim(V \otimes W) = \dim V \dim W$
- $\mathbb{R} \otimes V \cong V \otimes \mathbb{R} \cong V$ canonicamente
- I prodotti tensori degli elementi di due basi formano una base del prodotto tensore.

Definizione. Lo spazio dei tensori di tipo (r, s) è $V_{r,s} = \bigotimes_{i=1}^r V \otimes \bigotimes_{j=1}^s V^*$

Definizione. Un tensore della forma $\bigotimes_{i=1}^r v_i \otimes \bigotimes_{j=1}^s v_j^*$

Definizione. $T(V) = \bigoplus_{r,s} V_{r,s}$ è un'algebra bigraduata associativa e non commutativa.

Definizione. Un'applicazione $V^r \times (V^*)^s \rightarrow W$ è multilineare se è lineare in ogni variabile.

Esempio. Prodotti scalari, determinante, prodotto vettoriale.

Corollario 2.3. Ogni applicazione multilineare corrisponde unicamente ad un'applicazione lineare su $V_{r,s}$.

2.2 Tensori antisimmetrici

Definizione. Un tensore antisimmetrico sta in

$$\Lambda V = \bigoplus_k \frac{V_{k,0}}{\langle v \otimes v \rangle \cap V_{k,0}}$$

(funziona perché il denominatore è un ideale bilatero, graduato, bla bla bla) che l'algebra esterna.

Proposizione 2.2. $u \wedge v = (-1)^{\deg u \deg v} v \wedge u$

Dimostrazione. Basta dimostrarlo sui tensori decomponibili, dove per scambiare di posto due tensori bisogna fare $\deg u \deg v$ scambi. \square

Proposizione 2.3. Una base di $\Lambda^k V$ è costituita dai prodotti esterni di elementi della base in ordine crescente, che sono $\binom{d}{k}$

Dimostrazione. I prodotti tensori decomponibili di elementi della base generano $V_{k,0}$ e dato che il prodotto esterno è alternante posso prendere quelli in ordine crescente. Fissando un k i $\binom{d}{k}$ elementi e_{J_i} sono linearmente indipendenti perché da una somma $a_i e_{J_i}$ posso estrarre il coefficiente a_ℓ moltiplicando con gli $e_{J_i^c}$ in modo da uccidere tutti gli altri ed arrivare a $\pm a_\ell e_1 \wedge \dots \wedge e_k$. \square

Corollario 2.4. $\dim \Lambda V = 2^d$

Definizione. Un'applicazione multilineare è alternante se $f(\sigma(v_i)) = \varepsilon(\sigma)f(v_i)$

Esempio. Ogni funzionale lineare, il determinante, il prodotto vettoriale.

Esempio. Se ci fosse un'applicazione multilineare alternante canonica sarebbe $\varphi(v_i) = \bigwedge_i v_i$.

Proposizione 2.4 (Proprietà universale dell'algebra esterna). Applicazione multilineare alternante = "proiezione multilineare alternante" + mappa lineare su $\Lambda^k V$, e tutti gli spazi con questa proprietà sono isomorfi.

Corollario 2.5. $\Lambda^2 \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3$ mediante \times / φ .

2.3 Dualità

Definizione. Un appaiamento tra due spazi è un modo bilineare di arrivare a un numero reale partendo da un v e usando u . Un appaiamento è perfetto se per ogni v c'è almeno un w per il quale (v, w) e viceversa.

Un appaiamento mette in relazione uno spazio col duale dell'altro, e se è perfetto questa identificazione è iniettiva e quindi un isomorfismo.

Esempio. Un prodotto scalare è un appaiamento di V con sé stesso.

Esempio (Tra $(V^*)_{r,s}$ e V). Per ottenere un numero reale applichiamo gli r covettori agli r vettori e gli s covettori agli s co-covettori e moltiplichiamo. Questo appaiamento dà $(V^*)_{r,s} \cong (V_{r,s})^* \cong M_{r,s}(V)$.

Esempio (Tra $\Lambda^k(V^*)$ e $\Lambda^k V$). Per ottenere un numero reale calcoliamo l'area dell'ipercubo formato dai vettori nella base specificata dai covettori.

$$(v^*, u) = \det(v_i^*(u_j))$$

Questo dà $\Lambda^k(V^*) \cong (\Lambda^k V)^* \cong \Lambda^k(V)$ per ogni k e anche per l'algebra intera.

Un'altra scelta è

$$(v^*, u) = \frac{1}{k!} \det(v_i^*(u_j))$$

Questi due isomorfismi α e β danno strutture diverse strutture di algebra a $\Lambda^k(V)$. Il prodotto dato da β è in un certo senso normalizzato e può essere utile per definire certi oggetti come suoi punti fissi.

Proposizione 2.5.

$$(f \wedge_\alpha g)(v_i) = \sum_{\sigma \in \text{Sh}_{k,\ell}} \varepsilon(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)})$$

$$f \wedge_\beta g = \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} f \wedge_\alpha g$$

Dimostrazione. Usando l'isomorfismo calcoliamo poi il determinante con la formula di Leibniz. Scomponiamo le permutazioni in un prodotto di uno shuffle e di due permutazioni separate. Queste si raccolgono di nuovo usando l'isomorfismo al contrario, così che bisogna sommare solo sugli shuffle. \square

2.4 Endomorfismi

Definizione. La moltiplicazione esterna per un $u \in \Lambda V$ fissato è un endomorfismo ε_u . Il suo duale è la moltiplicazione interna ι_u che inserisce u come primo elemento di una mappa lineare alternante. Sostanzialmente $\iota_u = \varepsilon_u^\dagger$ secondo l'appaiamento appropriato.

Definizione. Un endomorfismo di ΛV si dice:

- derivazione se rispetta la regola di Leibniz
- antiderivazione se rispetta la regola di Leibniz graduata:

$$\varphi(u \wedge v) = \varphi(u) \wedge v + (-1)^{\deg u} \wedge \varphi(v)$$

- di grado l se aumenta il grado di l

Proposizione 2.6. La moltiplicazione interna per un vettore è un antiderivazione di grado -1.

Dimostrazione. Il fatto che sia un'antiderivazione lo si verifica sui decomponibili mostrando che

$$\iota_u(v_1^* \wedge \cdots \wedge v_k^*) = \sum_i (-1)^{i+1} v_1^* \wedge \cdots \wedge \iota_u v_i^* \wedge \cdots \wedge v_k^*$$

L'idea è di usare l'appaiamento fino a raggiungere un numero reale. A sinistra:

$$(\iota_{w_1}(v^*), w_2 \wedge \cdots \wedge w_k) = (\varepsilon_{w_1}^\dagger(v^*), w_2 \wedge \cdots \wedge w_k) = (v, w)$$

A destra, usando che $\iota_u v_i^* = v_i^*(u)$:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_i (-1)^{i+1} v_1^* \wedge \cdots \wedge \iota_u v_i^* \wedge \cdots \wedge v_k^*, w_2 \wedge \cdots \wedge w_k \right) \\ &= \left(\sum_i (-1)^{i+1} v_i^*(u) v_1^* \wedge \cdots \wedge v_k^* w_2 \wedge \cdots \wedge w_k \right) \\ &= \sum_i (-1)^{i+1} v_i^*(w_1) \det\{v_j^*(w_\ell)\}_{i1} \end{aligned}$$

che è lo sviluppo di Laplace lungo la prima colonna del determinante di $v_j^*(w_\ell)$. \square

Nota. Λ è un funtore covariante dalla categoria degli spazi vettoriali reali nelle algebre reali associative.

Esempio. $\Lambda^d \varphi$ è la moltiplicazione per $\det \varphi$.

2.5 Campi

Definizione. Su una varietà:

- Il fibrato tensoriale di tipo (r,s) è $T_{r,s}(M) = \cup(T_p M)_{r,s}$
- Il $(k$ -esimo) fibrato esterno è $\Lambda^k(M) = \cup \Lambda^{(k)} T_p^* M$

Definizione. Le sezioni (C^∞) di questi fibrati si dicono campi tensoriali di tipo (r, s) oppure (k) -forme differenziali. In coordinate locali:

$$\begin{aligned}\alpha|_U &= a_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \frac{\partial}{\partial x^I} \wedge dx^J \\ \omega|_U &= b_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} dx^I\end{aligned}$$

dove le componenti sono funzioni C^∞ .

Lemma 2.1. Se ω è un'applicazione C^∞ multilineare alternante sui campi vettoriali $\omega(X_i)|_p$ dipende solo da $X_i(p)$.

Dimostrazione. Mostriamo che se $X|_p = 0$ allora $\omega(X) = 0$.

Prendendo una funzione cut-off φ che vale 1 in un sottointorno di U e 0 fuori da U possiamo considerare i campi $X_i = \varphi \partial_{x_i}$ e la funzione $\tilde{a}^i \supset \varphi a^i$ definiti globalmente e nulli al di fuori di U . Riscrivendo X in funzione di questi abbiamo che

$$\omega(X)\Big|_p = \omega(\tilde{a}^i X_i + (1 - \varphi^2)X)\Big|_p = \tilde{a}^i \Big|_p \omega(X_i)\Big|_p + (1 - \varphi^2)\omega(X)\Big|_p = 0$$

Posso fare queste conclusioni proprio perché abbiamo oggetti estesi a tutta la varietà. \square

Proposizione 2.7. C'è corrispondenza 1:1 tra k -forme differenziali e mappe k -multilineari alternanti sui campi vettoriali. Più in generale i campi tensoriali (r, s) corrispondono ad applicazioni C^∞ -multilineari $\Omega^r(M) \times X(M)^s \rightarrow C^\infty$.

Dimostrazione. L'idea è che se ho una mappa multilineare alternante a campi vettoriali posso ricavare una forma differenziale, che prende in input singoli vettori, considerando un qualsiasi campo globale che nel punto che considero sia uguale al vettore, dato che non mi interessa del campo all'infuori di questo punto. \square

2.6 Derivate

Teorema 2.2 (Differenziale esterno). Esiste un'unica antiderivazione di grado 1 sulle forme differenziali che manda una funzione nel suo differenziale e soddisfa $d^2 = 0$.

Dimostrazione. Se $\omega\Big|_{D \cap U} = a_I dx^I$ definiamo

$$\hat{d}\omega_p = da_I\Big|_p \wedge dx^I\Big|_p$$

Questo è un endomorfismo di grado 1 che dipende solo dal germe della forma. Mostriamo che è un'antiderivazione sui tensori decomponibili (ogni termine si considera valutato in p):

$$\begin{aligned}\hat{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \hat{d}(f dx_I \wedge g dx_J) \\ &= \hat{d}(\varepsilon f g dx_K) \\ &= \varepsilon(g(p)df + f(p)dg) \wedge dx_K \\ &= df \wedge dx_I \wedge g(p)dx_J \\ &\quad + (-1)^{\deg f} f(p)dx_I \wedge dg \wedge dx_J \\ &= \hat{d}\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge \hat{d}\omega_2\end{aligned}$$

Mostriamo che è nilpotente (ogni termine valutato in p):

$$\begin{aligned}
\hat{d}(df) &= \hat{d}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \wedge dx^i|_p \\
&= \sum_{j<i} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i - \sum_{j>i} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \\
&= \sum_{j<i} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i - \sum_{i>j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right) dx^j \wedge dx^i \\
&= 0
\end{aligned}$$

dove nel primo passaggio ho invertito dx^i e dx^j mentre nel secondo i e j .

Calcolando $\hat{d}\omega$ in coordinate locali si vede che un differenziale che soddisfa queste proprietà non dipende da esse.

Formalmente possiamo solo ora parlare di d e senza i punti. Si verifica che effettivamente d^2 continua a fare 0.

Per mostrare l'unicità mostriamo che un qualsiasi \bar{d} che soddisfa le proprietà è locale, cioè se $\omega = 0$ in un intorno W allora $d\omega|_p = 0$. Prendiamo una funzione cut-off uguale a 0 in un sottointorno di W e 1 fuori da W :

$$\bar{d}\omega|_p = \bar{d}(\varphi\omega)_p = \bar{d}\varphi_p + \varphi(p)\bar{d}\omega_p = 0$$

Dato che questo \bar{d} funziona solo sulle forme globalmente definite, per definirlo su forme locali estendiamo ω a una forma globale con lo stesso germe in p moltiplicandola per una funzione cut-off nulla fuori dal dominio di ω e uguale a 1 in un intorno di p . Allora $\psi\omega \supset \omega$ e definiamo

$$\bar{d}\omega_p = \bar{d}(\psi\omega)_p$$

Questo \bar{d} soddisfa le stesse proprietà di d , Leibniz graduato si vede sostituendo ω_1 e ω_2 con $\psi\omega_1$ e $\psi\omega_2$, mentre la nilpotenza si ha espandendo il prodotto e usando che ψ è costante in un intorno di p . \square

Esempio. Su $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ consideriamo la 1-forma

$$\alpha(x, y) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

Si verifica che $d\alpha = 0$.

Definizione. Puoi fare la moltiplicazione interna anche per un campo vettoriale.

Esempio. Sulla varietà $\mathbb{R}^+ \times (-\pi, \pi)$ con coordinate (ρ, ϑ) consideriamo il campo ∂_ρ e la forma $d\rho \wedge d\vartheta$. Allora $X \lrcorner \omega = d\vartheta$.

Definizione. Data una mappa ψ il duale del differenziale $(d\psi_p)^* : T_{\psi(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$ induce un omomorfismo di algebre che permette di tirare indietro forme su N a forme su M :

$$\begin{aligned}
\Lambda(d\psi_p)^* &: \Lambda T_{\psi(p)}^*N \rightarrow \Lambda T_p^*M \\
\psi^*\omega_p &= \Lambda(d\psi_p)^*(\omega_{\psi(p)})
\end{aligned}$$

Nel caso in cui f sia una funzione $\psi^*f = f \circ \psi$.

Nota. Alle forme basta una mappa C^∞ per essere tirate indietro. Ai vettori per essere spinti in avanti serve un diffeomorfismo locale.

Proposizione 2.8.

1. Il pullback è un omomorfismo di algebre
2. Il pullback commuta con il differenziale esterno.
3. $\psi^*(\omega)(X_i)(p) = \omega_{\psi(p)}(d\psi_p(X_i(p)))$

Dimostrazione. (1) e (3) sono ovvi. Per due, nel caso di una funzione:

$$\psi^*(df)(p) = (d\psi_p)^*(df_{\psi(p)}) = d(f \circ \psi)_p = d(\psi^*(f))_p$$

Dato che in coordinate locali una forma si scrive in termini di una funzione e di differenziali delle coordinate, possiamo usare la relazione trovata e l'omomorfismo di algebre per portare indietro $a_I dx_I$ a $(a_I \circ \psi)d(x_I \circ \psi)$ ottenendo ancora una forma. Differenziando:

$$\begin{aligned} d(\psi^*(\omega))_p &= d(a_I \circ \psi)d(x_I \circ \psi)_p \\ &= (da_I \circ \psi)d(x_I \circ \psi)_p \\ &= \psi^*(da_I \circ \psi)d(x_I \circ \psi)_p \\ &= \psi^*(d\omega)_p \end{aligned}$$

□

Nota. Dato che $(\Lambda\psi \circ \Lambda\varphi)^* = (\Lambda\varphi)^* \circ (\Lambda\psi)^*$ abbiamo $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \psi^*$.

Esempio. Calcoliamo il pullback di α mediante $(\rho, \vartheta) \mapsto (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta)$.

$$\begin{aligned} \Phi^*(dx) &= d(x \circ \Phi) = \frac{\partial(x \circ \Phi)}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial(x \circ \Phi)}{\partial \vartheta} d\vartheta = \cos \vartheta d\rho - \rho \sin \vartheta d\vartheta \\ \Phi^*(dy) &= d(y \circ \Phi) = \frac{\partial(y \circ \Phi)}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial(y \circ \Phi)}{\partial \vartheta} d\vartheta = \sin \vartheta d\rho + \rho \cos \vartheta d\vartheta \\ \Phi^*(\alpha) &= \Phi^* \left(\frac{1}{x^2 + y^2} (-y dx + x dy) \right) \\ &= \frac{1}{\rho^2} (-\rho \sin \vartheta (\cos \vartheta d\rho - \rho \sin \vartheta d\vartheta) + \rho \cos \vartheta (\sin \vartheta d\rho + \rho \cos \vartheta d\vartheta)) \\ &= d\vartheta \end{aligned}$$

Esempio (La 1-forma tautologica sul fibrato cotangente). Sia $\pi : T^*M \rightarrow M$. La 1-forma canonica sullo spazio delle fasi, nel punto (q_1, p_1) , agisce su un vettore di $T_{(q_1, p_1)} T^*M$, una coppia velocità-momento (v, q_v) , così:

$$\lambda_{q_1, p_1} \left(\frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{\partial}{\partial p_2} \right) = p \left(d\pi_{q_1, p_1} \left(\frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{\partial}{\partial p_2} \right) \right) \approx p_1 \left(\frac{\partial}{\partial q_2} \right)$$

In coordinate locali ha l'aspetto $p_i dq^i$.

È tautologica perché fa fare al momento della configurazione quello che lui è nato per fare: agire su un vettore velocità in quel punto.

Questa forma cancella il pullback:

$$\omega^*(\lambda) = \omega$$

Infatti:

$$\begin{aligned}\omega^*(\lambda)_p(v) &= \lambda_{p,\omega_p}(v) \\ &= \omega_p(d\pi_{p,\omega_p}(d\omega_p(v))) \\ &= \omega_p(d(\pi \circ \omega_p)(v)) \\ &= \omega_p(v)\end{aligned}$$

dato che ω è una sezione del fibrato cotangente.

2.7 Coomologia

Definizione. Le forme su una varietà formano un'algebra differenziale commutativa graduata chiamata algebra di de Rham.

Definizione. Una p -forma è

- *chiusa* se sta in $\ker d_p$ (solenoidale)
- *esatta* se sta in $\text{Im } d_{p-1}$ (conservativa)

Definizione. Il p -esimo gruppo di coomologia di de Rham è l'insieme di forme chiuse non esatte:

$$H_{dR}^p = \frac{\ker d_p}{\text{Im } d_{p-1}} = \frac{Z^p}{B^p}$$

Esempio (Varietà connesse). Su una varietà differenziale connessa non esistono forme esatte, e ogni 0-forma chiusa è una funzione costante, quindi H_{dR}^0 è \mathbb{R} .

Esempio (\mathbb{R}). Gli unici gruppi non banali sono per $p = 0$, che dà \mathbb{R} , e per $p = 1$. Ogni forma su \mathbb{R} è chiusa, ma anche esatta perché $f(x)dx$ ha una primitiva, dunque $H_{dR}^1(\mathbb{R}) = 0$.

Esempio ($H_{dR}^1(S^1)$). Cerchiamo 1-forme senza una primitiva.

Dato che S^1 è compatto non esistono 1-forme esatte mai nulle. La 1-forma $\Phi^*\alpha$ è chiusa ma non è mai nulla, quindi rappresenta una classe di coomologia non banale.

$$\alpha \Big|_{S^1 - \{-1\}} = d\vartheta$$

Una funzione su S^1 è una funzione su \mathbb{R} di periodo 2π .

Dato che α non è mai nulla possiamo scrivere ogni 1-forma come $f\alpha$, su W semplicemente connessa $f d\vartheta$.

Se correggiamo $f d\vartheta$ sottraendole il suo integrale

$$\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) d\vartheta$$

la sua funzione integrale ha periodo 2π , pertanto $f d\vartheta - \bar{f} d\vartheta = dg$ è esatta e $[f\alpha] \propto [\alpha]$, e quindi $H_{dR}^1(S^1) \cong \mathbb{R}$.

2.8 Altre derivate

Definizione. La *derivata di Lie* di Y rispetto a X è

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(d\psi_{-t})(Y_{\psi_t(p)}) - Y_p}{t} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (d\psi_{-t})(Y_{\psi_t(p)})$$

L'idea è

- Parti da p e segui la curva integrale di X passante per p fino a $\psi_t(p)$, e valuta Y in questo punto. (Lancia l'ago magnetizzato e lascialo trasportare dalla corrente per un breve tratto. Osserva in che direzione si orienta.)
- Porta indietro il vettore ottenuto al punto di partenza utilizzando $(d\psi_{-t})_{\psi_t(p)}$. (Tira la canna da pesca.)
- Confronta il vettore portato indietro con l'orientazione del tuo ago magnetico nel punto p .

Per tirare indietro una forma invece che usare $(d\psi_{-t})_p$ (ci era andata bene che avevamo un diffeomorfismo) usiamo ψ_t^* :

$$(\mathcal{L}_X \omega)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_t^*(\omega_{\psi_t(p)}) - \omega_p}{t} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_t^*(\omega_{\psi_t(p)})$$

Per un campo tensoriale arbitrario:

$$(\mathcal{L}_X \omega)_p = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (d\psi_{-t})(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) \otimes \psi_t^*(v_1^* \otimes \cdots \otimes v_s^*)$$

dove $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v_1^* \otimes \cdots \otimes v_s^* = T(\psi_t(p))$.

Lemma 2.2 (Formula implicita per il differenziale).

$$\begin{aligned} d\omega(Y_0, \dots, Y_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i Y_i(\omega(Y_0, \dots, \hat{Y}_i, \dots, Y_p)) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j], Y_0, \dots, \hat{Y}_i, \dots, \hat{Y}_j, \dots, Y_p) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Espandiamo entrambi i membri nel caso $p = 1$, in coordinate locali, per $\omega = fdg$

$$\begin{aligned} (d\omega)(X, Y) &= (df \wedge dg)(X, Y) \\ &= df(X)dg(Y) - df(Y)dg(X) \\ &= X(f)Y(g) - Y(f)X(g) \\ X(\omega(Y) - Y(\omega(X))) - \omega([X, Y]) &= X(fY(g) - Y(fX(g))) - f[X, Y](g) \\ &= X(f)Y(g) + fX(Y(g)) \\ &\quad - Y(f)X(g) - fY(X(g)) \\ &\quad - fX(Y(g) + fY(X(g))) \\ &= X(f)Y(g) - Y(f)X(g) \end{aligned}$$

□

Proposizione 2.9. (a) $\mathcal{L}_X f = X(f)$

(b) $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$

(c) \mathcal{L} è una derivazione delle forme che commuta con d

(d) (Formula magica di Cartan) $\mathcal{L}_X = \iota_X d + d\iota_X$

(e) Per $Y_0, \dots, Y_p \in \mathfrak{X}$

$$\mathcal{L}_{Y_0}(\omega(Y_1, \dots, Y_p)) = (\mathcal{L}_{Y_0}\omega)(Y_1, \dots, Y_p) + \sum_{i=1}^p \omega(Y_1, \dots, Y_{i-1}, \mathcal{L}_{Y_0}Y_i, Y_{i+1}, \dots, Y_p)$$

e

Dimostrazione. (a) Usando la definizione di flusso

$$\psi_t^*(f)(p) = (f \circ \sigma_p)(t)$$

dove σ_p è la curva integrale passante per p . Dunque

$$(\mathcal{L}_X f)(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \sigma_p)(t) = \left. df_{\sigma_p(t)}(\sigma_p'(t)) \right|_{t=0} = df_p(X_p) = X(f)(p)$$

perché le curve integrali rappresentano il campo in ogni punto.

(b) Usando la definizione di differenziale

$$(\mathcal{L}_X(f)(p)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y_{\psi_t(p)}(f \circ \psi_{-t})$$

Definiamo su un intorno di $(0, 0)$ la funzione

$$H(t, s) = (f \circ \psi_{-t} \circ \varphi_s \circ \psi_t)(p)$$

dove φ_s è il gruppo a un parametro locale di Y . Usiamo (a) applicato alla funzione $f \circ \psi_{-t}$ nel punto $\psi_t(p)$:

$$Y_{\psi_t(p)}(f \circ \psi_{-t}) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (f \circ \psi_{-t})(\varphi_s(\psi_t(p))) = \left. \frac{\partial H}{\partial y} \right|_{t,0}$$

così che

$$(\mathcal{L}_X f)(p) = \left. \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \right|_{(0,0)}$$

Per calcolare questa derivata facciamo un passaggio intermedio ponendo

$$K(t, s, u) = (f \circ \psi_u \circ \varphi_s \circ \psi_t)(p)$$

così che $H(t, s) = K(t, s, -t)$. Dalla regola della catena:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0)} = \frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0,0)} - \frac{\partial^2 K}{\partial z \partial y} \Big|_{(0,0,0)}$$

Dato che $K(t, s, 0) = (f \circ \varphi_s)(\psi_t(p))$ possiamo calcolare

$$\frac{\partial K}{\partial y} \Big|_{(t,0,0)} = \frac{d}{ds} (f \circ \varphi_s)(\psi_t(p)) = (\mathcal{L}_Y f)(\psi_t(p)) = Y(f)(\psi_t(p))$$

Andando avanti:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0,0)} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (Y(f)(\psi_t(p))) = (\mathcal{L}_X(Y(f)))(p) = X_p(Y(f))$$

Ragionando analogamente per $K(0, s, u) = (f \circ \psi_u)\varphi_s(p)$ troviamo:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial y \partial z} \Big|_{(0,0,0)} = Y_p(X(f))$$

- (c) Mostriamo che \mathcal{L}_X è una derivazione togliendo e aggiungendo $\omega_1 \wedge \psi_t^*(\omega_2)$ al rapporto incrementale

$$\frac{\psi_t^*(\omega_1 \wedge \omega_2) - \omega_1 \wedge \omega_2}{t} = \frac{\psi_t^*(\omega_1) - \omega_1}{t} \wedge \psi_t^*(\omega_2) + \omega_1 \wedge \frac{\psi_t^*(\omega_2) - \omega_2}{t}$$

e prendendo il limite $t \rightarrow 0$ ricordando che ψ_0^* è l'identità.

Mostriamo che $[\mathcal{L}_X, d] = 0$ sulle funzioni, cioè che

$$\mathcal{L}_X(df)_p = d(\mathcal{X}f)_p$$

Valutiamo questi covettori su un vettore tangente:

$$\begin{aligned} d(\mathcal{L}_X f)_p(v_p) &= v_p(\mathcal{L}_X f) \\ &= v_p \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \psi_t) \right) \\ \mathcal{L}_X(df)_p(v_p) &= \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_t^*(df_{\psi_t(p)})(v_p) \right) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_t^*(df_{\psi_t(p)})(v_p) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} df_{\psi_t(p)}(d\psi_t(v_p)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d(f \circ \psi_t)(v_p) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} v_p(f \circ \psi_t) \end{aligned}$$

Per il teorema grosso sul flusso dei campi, $f \circ \psi_t$ è una funzione liscia su $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W$. Estendiamo v_p a campo vettoriale su W e consideriamo i campi $d/dt, V \in \mathfrak{X}((-\varepsilon, \varepsilon) \times W)$. I due membri sopra sono uguali se questi due campi commutano, come infatti succede.

Essendo una derivazione, l'asserzione è vera anche su forme arbitrarie (scrivendole in coordinate locali).

(d) $\mathcal{L}_X, \iota_X \circ d$ e $d \circ \iota_X$ sono derivazioni di grado 0 che commutano con d e coincidono sulle funzioni.

(e) Verifichiamo nel caso $p = 1$, in coordinate locali, per $\omega = fdg$

Usando (a):

$$\mathcal{L}_X(\omega(Y)) = X(fY(g)) = X(f)Y(g) + fX(Y(g))$$

Usando (d)

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X\omega)(Y) &= \iota(X)(d\omega)(Y) + d(\iota(X)\omega) \\ &= \iota(X)(df \wedge dg)(Y) + d(fX(g))Y \\ &= df(X)dg(Y) - df(Y)dg(X) + df(Y)X(g) + fd(X(g))(Y) \\ &= X(f)Y(g) + fY(X(g)) \end{aligned}$$

Sottraendo una all'altra e usando (b)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\omega(Y)) - (\mathcal{L}_X\omega)(Y) &= f(X(Y(g)) - Y(X(g))) \\ &= f[X, Y](g) \\ &= fdg([X, Y]) \\ &= \omega([X, Y]) \\ &= \omega(\mathcal{L}_XY) \end{aligned}$$

□

2.9 Orientazione

Definizione. Un'orientazione di uno spazio vettoriale è la scelta di un elemento non nullo di $\Lambda^d V^* \cong \mathbb{R}$, che ha due componenti connesse, che corrispondono alle due possibili orientazioni.

Una varietà è orientabile se rimuovere la sezione nulla spezza il fibrato esterno massimo in due componenti connesse, e un'orientazione è la scelta di una di queste componenti.

Definizione. Una mappa preserva l'orientazione se la mappa indotta sui fibrati potenza esterna mappa la componente dritta nella componente dritta.

Proposizione 2.10. Una d -varietà è orientabile se e solo se ha una d -forma mai nulla.

Dimostrazione. Data una d -varietà orientabile, per ogni punto prendiamo una d -forma ω definita in un suo intorno, il cui valore nel punto è dritto (in particolare non nullo).

Restringendo a sottointorni sui quali $\omega|_{V_p} \neq 0$ otteniamo un ricoprimento aperto.

Data una partizione dell'unità subordinatagli, $\omega = \sum \varphi_i \omega_{p_i}$ è una d -forma mai nulla.

Viceversa i multipli per funzioni positive o negative di una d -forma mai nulla separano il fibrato massimo in componenti disconnesse. \square

Esempio. L'orientazione standard di \mathbb{R}^d è data dalla forma $dr_1 \wedge \cdots \wedge dr_d$

Esempio. Ogni varietà parallelizzabile è orientabile. In particolare, ogni gruppo di Lie.

Esempio. Le varietà ottenute col teorema della funzione implicita sono orientabili. In particolare, le sfere.

Esempio. Gli spazi proiettivi dispari sono orientabili, i pari no.

2.10 Integrazione

Definizione. Data una d -forma su \mathbb{R}^d la possiamo scrivere come $f d\Omega$. Poniamo

$$\int_A \omega = \int_A f$$

Teorema 2.3 (Cambio di variabile). Cambiando variabile con un diffeomorfismo di un'aperto limitato, l'integrale su un suo sottoinsieme misurabile diventa

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi) |\det d\varphi|$$

Che scritto in termini di forme è

$$\int_{\varphi(A)} \omega = \pm \int_A \varphi^* \omega$$

a seconda che φ preservi o no l'orientazione.

Definizione. Il d -simpleso standard è $D_{\|\cdot\|_1}^d / \mathbb{Z}^{2^d}$

Un p -simpleso singolare differenziabile su varietà è un'inclusione $\sigma : \Delta^p \rightarrow M$ che estende a una mappa liscia su un intorno di Δ^p in \mathbb{R}^d .

Definizione. Una p -catena singolare differenziabile è una combinazione lineare finita a coefficienti reali di p -simplessi singolari differenziabili.

Definizione. Possiamo considerare il p -simpleso come una faccia del $(p+1)$ -simpleso in $(p+1)$ -modi con le inclusioni k_i^p :

- La faccia 0 è quella diagonale
- La faccia i è quella perpendicolare all'asse x_i .

Le facce di un simpleso, denotate con indice alto, in una varietà sono $\sigma^i = \sigma \circ k_i^{p-1}$.

Definizione. Il bordo di un simpleso singolare differenziabile σ è la catena

$$\partial\sigma = \sum_i (-1)^i \sigma^i$$

Estendendo per linearità ∂ è l'operatore di bordo su catene arbitrarie.

Definizione. L'integrale di una p -forma su un p -simpleso singolare differenziabile è

$$\int_{\sigma} \omega = \begin{cases} \omega(\sigma(0)) & p = 0 \\ \int_{\Delta^p} \sigma^*(\omega) & p > 0 \end{cases}$$

Questa definizione si estende per linearità a catene arbitrarie.

Teorema 2.4 (Stokes I).

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega$$

Definizione. Un dominio regolare è un sottoinsieme di una varietà in cui per ogni punto si verifica una di queste condizioni:

- (a) p è un punto interno, cioè un intorno aperto di p è contenuto in D
- (b) p è un punto esterno, cioè un intorno aperto di p è contenuto in $M - D$
- (c) p è un punto di bordo, cioè esiste una carta locale centrata in p tale che $\varphi(U \cap D) = \varphi(U) \cap \mathbb{H}^d$, dove \mathbb{H}^d è l'iperpiano $r_d \geq 0$.

Le carte locali su ∂D lo rendono una sottovarietà regolare.

Esempio. I dischi sono domini regolari, i semplici no.

Definizione. Un vettore su ∂D si dice esterno se ogni curva nella sua direzione esce per tempi piccoli da D .

Definizione. L'orientazione indotta sul bordo di un dominio regolare considera dritte le basi che sono dritte aggiungendo come primo elemento un vettore esterno.

Definizione. Un simpleso in una varietà è regolare se l'inclusione estende ad un diffeomorfismo, e se questa preserva l'orientazione il simpleso si dice orientato.

Definizione. Per calcolare l'integrale di una forma a supporto compatto su un dominio regolare, lo ricopriamo con aperti di due tipi:

1. Interni di un d -simpleso regolare orientato interno a D
2. Immagini mediante un d -simpleso regolare orientato di un intorno di un punto della d -esima faccia di Δ^d , che interseca ∂D solo nella d -esima faccia, la cui immagine o sta nel simpleso o fuori da D .

Prendiamo un ricoprimento finito di $\overline{\text{supp } \omega \cap D}$ fatto da aperti di questo tipo e completiamolo a un ricoprimento globale aggiungendogli $M - \overline{\text{supp } \omega \cap D}$.

Preso una partizione dell'unità φ, φ_i subordinata a questo ricoprimento definiamo

$$\int_D \omega = \sum_i \int_{\sigma_i} \varphi_i \omega$$

dove σ_i è il simpleso associato alla pezza U_i .

Lemma 2.3. La definizione non dipende né dal ricoprimento né dalla partizione dell'unità scelti.

Teorema 2.5 (Stokes II). Stokes I vale per forme a supporto compatto su domini regolari di una varietà orientata.

Corollario 2.6. Su una d -varietà compatta e orientata per $\omega \in \Omega^{d-1}(M)$ abbiamo

$$\int_M d\omega = 0$$

Corollario 2.7. Una forma di volume su una varietà compatta e orientata non è esatta.

Corollario 2.8. L'ultimo gruppo di coomologia di de Rham di una varietà compatta orientata non è mai banale.

Spoiler: è generato dalla forma di volume.

3 Geometria riemanniana

3.1 Connessioni affini

Definizione. Una connessione affine è un modo di derivare un campo Y rispetto ad un altro X , ottenendo un altro campo $\nabla_X Y$.

- $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

È tensoriale solo nella prima variabile. Per confronto, la derivata di Lie non lo è in nessuna delle due.

Esempio. Per campi su \mathbb{R}^d la derivata direzionale $\nabla_X Y = X(Y)$ è una connessione affine.

Nota. Il valore di $\nabla_X Y$ in un punto dipende solo dal valore di X e Y in un intorno del punto.

Scrivendo X e Y in coordinate locali:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_i \alpha^i \nabla_{X_i} \left(\sum_j \beta^j X_j \right) \\ &= \sum_{i,j} \alpha^i \beta^j \nabla_{X_i} X_j + \alpha^i X_i(\beta^j) X_j \\ &= \sum_k \left(\sum_{i,j} \alpha^i \beta^j \Gamma_{ij}^k + \alpha^i X_i(\beta^k) \right) X_k \end{aligned}$$

Γ_{ij}^k sono i simboli di Christoffel della connessione in questa carta locale.

Nota. Una connessione permette di derivare arbitrari campi tensoriali:

$$\begin{aligned} (\nabla_Y T)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, X_s) &= Y(T(\alpha_1, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, X_s)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r T(\alpha_1, \dots, \nabla_Y \alpha_i, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, X_s) \\ &\quad - \sum_{i=1}^s T(\alpha_1, \dots, \alpha_r, X_1, \dots, \nabla_Y X_i, \dots, X_s) \end{aligned}$$

Per una 1-forma

$$(\nabla_X \alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y)$$

Proposizione 3.1. Data una varietà con connessione affine e una curva, esiste un unico operatore D/dt sui campi lungo la curva che soddisfa

$$(i) \quad \frac{D}{dt}(X + Y) = \frac{DX}{dt} + \frac{DY}{dt}$$

$$(ii) \quad \frac{D}{dt}(fX) = \frac{df}{dt}X + f \frac{DX}{dt}$$

(iii) Se $X = Z(\sigma(t))$ proviene da un campo globale $\frac{DX}{dt} = \nabla_{\sigma'(t)} Z$

e che si chiama derivata covariante lungo σ .

Nota. L'ultimo punto ha senso perché la connessione dipende solo dai valori locali.

Dimostrazione. Supponiamo che un D/dt così esista. Allora

$$\begin{aligned} \frac{DX}{dt} &= \sum_j \frac{d\alpha^j}{dt} X_j + \sum_j \alpha^j \frac{DX_j}{dt} \\ \frac{DX_j}{dt} &= \nabla_{\sigma'(t)} X_j = \sum_i \frac{d\sigma^i}{dt} \nabla_{X_i} X_j \\ \frac{DX}{dt} &= \sum_j \frac{d\alpha^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{d\sigma^i}{dt} \alpha^j \nabla_{X_i} X_j \end{aligned}$$

il che dimostra che se esiste, è unico. Allora lo definiamo così in un intorno coordinato, e definendolo in altro intorno le definizioni devono coincidere nell'intersezioni per unicità. Pertanto può essere definito globalmente \square

Definizione. Un campo lungo una curva è parallelo se $\frac{DX}{dt} = 0$.

Proposizione 3.2. Data una curva e una condizione iniziale $X(t_0) = v$ esiste un unico campo vettoriale X parallelo che la soddisfa, detto il trasporto parallelo di v lungo σ .

Dimostrazione. Supponiamo che il risultato sia vero quando la traccia della curva sta in un aperto coordinato.

Allora X può essere definito in tutto un segmento $\sigma([t_0, t_1])$ per ogni t_1 perché questo per compattezza può essere ricoperto da un numero finito di aperti combinati, e sulle intersezioni le definizioni devono coincidere per unicità.

Per dimostrare il risultato nel caso di $\sigma(I) \subset U$ supponiamo che il campo cercato esista e scriviamolo in coordinate locali:

$$0 = \frac{DX}{dt} = \sum_k \left(\frac{d\alpha^k}{dt} + \sum_{i,j} \alpha^j \Gamma_{ij}^k \frac{d\sigma^i}{dt} \right) X_k$$

dà un sistema di d equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine nelle incognite $\alpha_k(t)$ con le condizioni iniziali $\alpha_k(t_0) = v_k$, che ha soluzione unica, quindi X esiste, è unico ed è definito per tutti i tempi. \square

Lemma 3.1. Il trasporto parallelo

$$\sigma \parallel_a^b : T_{\sigma(a)}M \rightarrow T_{\sigma(b)}M$$

è un isomorfismo lineare.

Dimostrazione. Dato che è lineare basta vedere che la sua inversa è data dal trasporto parallelo lungo la curva opposta. \square

Proposizione 3.3. Data una curva σ che parte da p con velocità v possiamo recuperare la derivata covariante come derivata del trasporto parallelo:

$$\frac{D}{dt} \Big|_{t=0} (X(\sigma(t))) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma \parallel_t^0 (X(\sigma(t)) - X(p))}{t}$$

Dimostrazione. Estendiamo una base di T_pM a campi paralleli X_i . In questa base:

$$\sigma \parallel_t^0 (X(\sigma(t))) = \sum_i \alpha^i(t) \sigma \parallel_t^0 (X_i(t)) = \sum_i \alpha^i v_i$$

Allora

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma \parallel_t^0 (X(\sigma(t)) - X(p))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sum_i (\alpha_i(\sigma(t)) - \alpha_i(0)) v_i}{t} = \sum_i \alpha'_i(0) v_i$$

D'altra parte

$$\frac{D}{dt} \Big|_{t=0} (X(\sigma(t))) = \sum_i \left(\alpha'_i(0) v_i + \alpha_i \frac{D}{dt} \Big|_{t=0} X_i \right) = \sum_i \alpha'_i(0) v_i$$

\square

Definizione. La torsione di una connessione è il campo tensoriale di tipo (1, 2)

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

Esempio. La derivata direzionale è una connessione senza torsione.

Nota. In coordinate locali, usando che i campi coordinati commutano, abbiamo

$$T(X_i, X_j) = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = \sum_k (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) X_k$$

Nota. Una connessione affine è senza torsione se e solo se parallelogrammi infinitesimali chiudono: della parentesi mi posso sempre fregare (mi sa che serve per renderlo un tensore) prendendo una base olonoma (localmente), per il resto la torsione misura la non commutatività del trasporto parallelo.

Definizione. Una curva è una geodetica se $\frac{D\dot{\gamma}(t)}{dt} = 0$, cioè è autoparallela, il che è equivalente a $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$.

Definizione. La curvatura di una connessione affine è il tensore di tipo (1, 3)

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

Nota. In coordinate locali si vede che la curvatura è un'ostruzione alla commutatività delle derivate covarianti.

$$\begin{aligned}
R(X_i, X_j)X_k &= (\nabla_{X_j} \nabla_{X_i} - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j})X_k \\
&= \nabla_{X_j} \left(\sum_{\ell} \Gamma_{ik}^{\ell} X_{\ell} \right) - \nabla_{X_i} \left(\sum_{\ell} \Gamma_{jk}^{\ell} X_{\ell} \right) \\
&= \sum_{\ell} (\Gamma_{ik}^{\ell} \nabla_{X_j} X_{\ell} + X_j(\Gamma_{ik}^{\ell}) X_{\ell}) - \sum_{\ell} (\Gamma_{jk}^{\ell} \nabla_{X_i} X_{\ell} + X_i(\Gamma_{jk}^{\ell}) X_{\ell}) \\
&= \sum_{s, \ell} \Gamma_{ik}^{\ell} \Gamma_{j\ell}^s + \sum_s X_j(\Gamma_{ik}^s) X_s - \sum_{s, \ell} \Gamma_{jk}^{\ell} \Gamma_{i\ell}^s + \sum_s X_i(\Gamma_{jk}^s) X_s \\
&= \sum_s \left(\sum_{\ell} (\Gamma_{ik}^{\ell} \Gamma_{j\ell}^s - \Gamma_{jk}^{\ell} \Gamma_{i\ell}^s) + X_j(\Gamma_{ik}^s) - X_i(\Gamma_{jk}^s) \right) X_s \\
&= \sum_s R_{ijk}^s X_s
\end{aligned}$$

Definizione. Una superficie parametrizzata è un'inclusione di un insieme connesso il cui bordo è differenziabile a tratti con angoli ai vertici non piatti.

Proposizione 3.4. Dato un campo Z lungo una superficie parametrizzata, posso derivarlo con le derivate covarianti in direzioni x e y lungo le immagini delle rette verticali e orizzontali di \mathbb{R}^2 .

Allora

$$\frac{D}{dx} \frac{D}{dy} Z - \frac{D}{dy} \frac{D}{dx} Z = R \left(\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y} \right) Z$$

Dimostrazione. Usando le proprietà della derivata covariante si trova

$$\begin{aligned}
\frac{D}{dx} \frac{D}{dy} Z - \frac{D}{dy} \frac{D}{dx} Z &= \sum z^i \left(\frac{D}{dx} \frac{D}{dy} X_i - \frac{D}{dy} \frac{D}{dx} X_i \right) \\
\frac{D}{dx} \frac{D}{dy} X_i - \frac{D}{dy} \frac{D}{dx} X_i &= \sum_{j, k} \frac{\partial s_j}{\partial x} \frac{\partial s_k}{\partial y} R(X_j, X_k) X_i \\
\frac{D}{dx} \frac{D}{dy} Z - \frac{D}{dy} \frac{D}{dx} Z &= \left(\sum_{j, k} z^i \frac{\partial s_j}{\partial x} \frac{\partial s_k}{\partial y} R(X_j, X_k) X_i \right) = R \left(\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y} \right) Z
\end{aligned}$$

□

Nota. La curvatura è un'ostruzione alla commutatività di trasporti paralleli lungo i bordi di rettangoli infinitesimali.

Dimostrazione. Prendiamo una carta locale con immagine tutto \mathbb{R}^d , e usiamola per includere un rettangolo $[0, x] \times [0, y]$ nella varietà come superficie parametrizzata.

Per ogni $x_0 \in [0, x]$ e $y_0 \in [0, y]$ consideriamo le curve

$$\begin{aligned}
\sigma_{x_0}(t) &= s(t, x_0) \\
\sigma^{y_0}(t) &= s(t, y_0)
\end{aligned}$$

Sappiamo che

$$\left(\frac{D}{\partial x}Z\right)(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sigma^y)^{-1} \parallel_u^0(Z(x, y)) - Z(0, y)}{x}$$

e

$$\begin{aligned} \left(\frac{D}{\partial y} \frac{D}{\partial x} Z\right)(0, 0) &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{(\sigma_0)^{-1} \parallel_y^0 \left(\left(\frac{D}{\partial x} Z\right)(0, y) \right) - \left(\frac{D}{\partial x} Z\right)(0, 0)}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \left((\sigma_0)^{-1} \parallel_y^0 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sigma^y)^{-1} \parallel_u^0(Z(x, y)) - Z(0, y)}{x} \right) \right. \\ &\quad \left. - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sigma^y)^{-1} \parallel_u^0(Z(x, 0)) - Z(0, 0)}{x} \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left((\sigma_0)^{-1} \parallel_y^0 \circ (\sigma^y)^{-1} \parallel_u^0 \right) (Z(x, y)) - (\sigma_0)^{-1} \parallel_y^0(Z(0, v)) \right) \\ &\quad \left. - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sigma^y)^{-1} \parallel_u^0(Z(x, 0)) - Z(0, 0)}{x} \right) \end{aligned}$$

E allo stesso modo

$$\begin{aligned} \left(\frac{D}{\partial x} \frac{D}{\partial y} Z\right)(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \left((\sigma_0)^{-1} \parallel_x^0 \circ (\sigma^y)^{-1} \parallel_u^0 \right) (Z(x, y)) - (\sigma_0)^{-1} \parallel_x^0(Z(x,)) \right) \\ &\quad \left. - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(\sigma_x)^{-1} \parallel_u^0(Z(0, y)) - Z(0, 0)}{y} \right) \end{aligned}$$

Sottraendo una all'altra otteniamo

$$\left(R \left(\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y} Z \right) (0, 0) \right) = \lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{1}{x, y} \left((\sigma_0)^{-1} \parallel_y^0 \circ (\sigma^y)^{-1} \parallel_x^0 - (\sigma_0)^{-1} \parallel_x^0 \circ (\sigma_x)^{-1} \parallel_y^0 \right) Z(x, y)$$

□

3.2 Metriche riemanniane

Definizione. Una metrica Riemanniana è un tensore simmetrico di tipo $(0, 2)$ definito positivo.

In carte locali:

$$g \Big|_U = g_{ij} dx^i \wedge dx^j = ds^2$$

Definizione. Un diffeomorfismo si dice isometria se $g = \psi^* h$.

Nota. Il gruppo delle isometrie di una varietà riemanniana, dotato della topologia compatto-aperto, è un gruppo di Lie, non necessariamente connesso, di dimensione al più $\binom{d+1}{2}$.

Definizione. Una mappa C^∞ è un'isometria locale in p se ristretta ad un intorno è un'isometria con la sua immagine.

Esempio. La metrica euclidea ha componenti $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Esempio. Scelto r , la metrica iperbolica sul semipiano superiore di \mathbb{R}^d ha componenti $(g_r)_{ij} = \frac{r^2}{x_d^2 \delta_{ij}}$. Questa varietà riemanniana è il semipiano iperbolico di parametro r .

Esempio. Ogni inclusione permette di portare indietro la metrica dello spazio ambiente. La sfera con la metrica pullback si dice sfera rotonda.

Esempio. Il prodotto di due varietà riemanniane è una varietà riemanniana con la somma delle norme portate indietro con le proiezioni.

Il toro $T^n = (S^1)^n$ con questa metrica (quella di S^1 è quella rotonda) si dice toro piatto.

Proposizione 3.5. Ogni varietà differenziale ammette una metrica riemanniana.

Dimostrazione. Dato un ricoprimento localmente finito di aperti coordinati, definiamo una metrica su ciascuna pezza portando indietro quella euclidea con la carta locale. Sommando tutte queste metriche pesate con una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento si ottiene una metrica. \square

Nota. Gli isomorfismi musicali permettono di identificare campi vettoriali e 1-forme:

$$\begin{aligned} X^\flat(Y) &= g(X, Y) \\ \alpha(X) &= g(\alpha^\sharp, X) \end{aligned}$$

Per esempio il gradiente di una funzione è in realtà $(df)^\sharp$.

In generale la metrica permette di abbassare di uno l'indice contravariante e alzare di 1 quello covariante.

Definizione. La lunghezza di un segmento di una curva è

$$\ell_a^b(\sigma) = \int_a^b |\sigma'(t)| dt$$

dove $|\sigma'(t)| = g(\sigma'(t), \sigma'(t))^{1/2}$ è la velocità di σ .

Definizione. L'angolo tra due vettori tangenti ad un punto è

$$\angle(v, w) = \frac{g_p(v, w)}{|v||w|}$$

Nota. Scelta una carta locale dove i vettori coordinati formano una base positiva in ogni punto, le componenti del tensore metrico si possono scrivere usando i coefficienti dei vettori coordinati su una base ortornormale $X_i(p) = \sum_j a_i^j e_j$:

$$g_{ij}(p) = g_p(X_i(p), X_j(p)) = \sum_{k,l} a_i^k a_j^l g_p(e_k, e_l) = \sum_k a_i^k a_k^j$$

Il volume del parallelepipedo formato dai campi coordinati è uguale a $\det(a_i^j) = \sqrt{\det(g_{ij}(p))}$, ma in un'altra carta locale diventa $J \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij}(p))}$ dove

$$J = \det \left(\frac{\partial(y^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} (p)_{ij} \right)$$

Definizione. Il volume riemanniano di un sottoinsieme aperto connesso a chiusura compatta e bordo trascurabile, che prendiamo contenuto nel dominio di una carta locale, è

$$\text{vol}(R) = \int_{\varphi(R)} \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \dots dx^d$$

Nota. Il teorema del cambio di variabile mostra che la formula non dipende dalla scelta della carta locale.

Per definire il volume di una regione non contenuta nel dominio di una carta locale usiamo una partizione dell'unità.

Nota. Una metrica riemanniana fornisce una forma di volume.

3.3 La connessione di Levi-Civita

Definizione. Una connessione affine è metrica se

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

nel senso che se noi ti aspetteresti anche il termine $\nabla_X(g)(Y, Z)$ dalla regola del prodotto.

Esempio. La derivata direzionale è metrica.

Proposizione 3.6. Sono equivalenti:

- (i) Una connessione affine è metrica
- (ii) La distanza tra campi vettoriali paralleli lungo ogni curva è costante
- (iii) Il terzo termine sparisce anche lungo una curva:

$$\frac{d}{dt}g(X, Y) = g\left(\frac{DX}{dt}, Y\right) + g\left(X, \frac{DY}{dt}\right)$$

Dimostrazione. (i) \implies (ii)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(P, P') &= \sigma'(t)(g(P, P')) = g(\nabla_{\sigma'(t)P, P'}) + g(P, \nabla_{\sigma'(t)P}P') \\ &= g\left(\frac{DP}{dt}, P'\right) + g\left(P, \frac{DP'}{dt}\right) = 0 \end{aligned}$$

(ii) \implies (iii) Scelta una base ortonormale di $T_{\sigma(t_0)}M$ possiamo estenderla per trasporto parallelo a una base ortonormale lungo tutta la curva. Scrivendo $X = \alpha^i P_i$ e $Y = \beta^i P_i$ le derivate covarianti sono semplicemente

$$\begin{aligned} \frac{DX}{dt} &= \frac{d\alpha^i}{dt} P_i \\ \frac{DY}{dt} &= \frac{d\beta^i}{dt} P_i \end{aligned}$$

Ma allora

$$g\left(\frac{DX}{dt}, Y\right) + g\left(X, \frac{DY}{dt}\right) = \sum_i \left(\frac{d\alpha^i}{dt}\beta^i + \alpha^i\frac{d\beta^i}{dt}\right) = \frac{d}{dt} \sum_i \alpha^i\beta^i = \frac{d}{dt}(X, Y)$$

□

(iii) \implies (i) Scelto un punto prendiamo una curva che parte dal punto con velocità iniziale $X(p)$. Allora

$$\begin{aligned} X(p)g(Y, Z) &= \frac{d}{dt}g(Y, Z)\Big|_{t=t_0} = g_p\left(\frac{DY}{dt}(t_0, Z(t_0))\right) + g_p\left(Y(t_0), \frac{DZ}{dt}(t_0)\right) \\ &= g_p(\nabla_{X(p)}Y, Z(t_0)) + g_p(Y(t_0), \nabla_{X(p)}Z) \end{aligned}$$

Lemma 3.2 (Lemma fondamentale della geometria riemanniana). Su ogni varietà riemanniana esiste un'unica connessione riemanniana, cioè metrica senza torsione, chiamata connessione di Levi-Civita.

Dimostrazione. Come al solito, supponendo che tale connessione esista abbiamo

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ Y(g(Z, X)) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ Z(g(X, Y)) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \end{aligned}$$

Sommando le prime due e sottraendo la terza otteniamo

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) &= g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X) + g([X, Y], Z) \\ &\quad + 2g(Z, \nabla_Y X) \end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned} g(Z, \nabla_Y X) &= \frac{1}{2}(X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) \\ &\quad - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) - g([X, Y], Z)) \end{aligned}$$

Che strano, ∇ è univocamente determinata. Allora la definiamo così. □

Corollario 3.1. Su una varietà riemanniana si può canonicamente

- derivare campi vettoriali
- parlare di parallelismo
- parlare di geodesiche
- parlare di curvatura

Esempio. Dato che la derivata direzionale è metrica e senza torsione è la connessione di Levi-Civita.

Nota. Poiché i campi coordinati commutano, l'espressione dei simboli di Christoffel in coordinate locali si ricava moltiplicando per la metrica inversa

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^\ell g_{\ell k} &= \frac{1}{2}(X^i(g_{jk}) + X^j(g_{ki}) - X^k(g_{ij})) \\ \Gamma_{ij}^m &= \frac{1}{2}(X^i(g_{jk}) + X^j(g_{ki}) - X^k(g_{ij}))g^{km} \end{aligned}$$

Esempio. Essendo i coefficienti della metrica euclidea costanti, i simboli di Christoffel sono nulli.

Esempio. Calcoliamo i simboli di Christoffel della metrica euclidea in coordinate polari. Sappiamo già che

$$\begin{aligned}\Phi^*(dx) &= \cos \vartheta d\rho - \rho \sin \vartheta d\vartheta \\ \Phi^*(dy) &= \sin \vartheta d\rho + \rho \cos \vartheta d\vartheta\end{aligned}$$

Pertanto

$$\Phi^*g = \Phi^*(dx^2 + dy^2) = d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2$$

quindi la matrice della metrica è

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

Usando la formula si vede che gli unici simboli di Christoffel non nulli sono $\Gamma_{\vartheta\rho}^{\vartheta} = \Gamma_{\vartheta\vartheta}^{\rho} = \frac{1}{\rho}$ e $\Gamma_{\vartheta\vartheta}^{\vartheta} = -\rho$.

Proposizione 3.7. La connessione di Levi-Civita di $g = \iota^*\tilde{g}$ è la proiezione ortogonale sullo spazio tangente alla sottovarietà della connessione della varietà ambiente.

Dimostrazione. Denotiamo con \tilde{Z}_{\parallel} la proiezione sullo spazio tangente alla varietà di un campo \tilde{Z} estensione su un aperto della varietà ambiente di Z .

∇ è metrica:

$$\begin{aligned}X(g(Y, Z))(p) &= \tilde{X}(\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{Z}))(p) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{Z}) + \tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Z}) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, Z) + \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Z}) \\ &= \tilde{g}(\nabla_X Y, Z) + \tilde{g}(Y, \nabla_X Z) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)\end{aligned}$$

Inoltre ∇ è senza torsione, infatti

$$(\nabla_X Y - \nabla_Y X)(p) = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{X})_{\parallel}(p) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{\parallel}(p) = [X, Y](p)$$

dato che l'inclusione correla le due coppie di campi. □

3.4 Geodetiche

Proposizione 3.8. Le geodetiche hanno velocità costante.

Dimostrazione.

$$\frac{d}{dt}|\dot{\gamma}(t)|^2 = \frac{d}{dt}g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 2g\left(\frac{D}{dt}(\dot{\gamma}(t)), \dot{\gamma}(t)\right) = 0$$

□

Nota. $\sigma(t) = (t^3, t^3)$ non è una geodetica perché non ha velocità costante, ma è una pregeodetica.

Esempio. Mostriamo che ogni cerchio massimo della sfera rotonda S_r^d , ovvero una sua intersezione con un 2-piano di \mathbb{R}^{d+1} , è una geodetica, se ha velocità costante.

Un tale piano è determinato da due vettori ortogonali p, v e il cerchio massimo è

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= p \cos t + v \sin t \\ \dot{\gamma}(t) &= -p \sin t + v \cos t = -\gamma(t)\end{aligned}$$

Dato che l'accelerazione della curva è ortogonale alla sfera, la derivata covariante del vettore velocità è nulla nella connessione di Levi-Civita della sfera.

Nota. In coordinate locali una curva è una geodetica se e solo se

$$0 = \frac{D}{dt}(\dot{\gamma}(t)) = \sum_k \left(\frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

il che dà un sistema di d equazioni differenziali non lineari del secondo ordine.

Per renderlo un sistema di $2d$ equazioni del primo ordine interpretiamola come l'equazione di una curva integrale di un campo vettoriale su TM .

Ogni curva può essere sollevata ad una curva sul fibrato tangente aggiungendole le componenti della sua velocità. Questo permette di riscrivere il sistema come

$$\begin{cases} \frac{d\gamma^k}{dt} = \dot{\gamma}^k(t) \\ \frac{d\dot{\gamma}^k}{dt} = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt} \end{cases}$$

Lemma 3.3. Esiste un unico campo sul fibrato tangente di una varietà riemanniana, detto campo geodetico, le cui curve integrali sono il sollevamento a TM delle geodetiche.

Dimostrazione. Se il campo esiste è unico, perché è soluzione di equazione differenziale, e per dimostrare che esiste possiamo definirlo localmente come sopra. Dall'unicità segue che è ben definito ovunque. \square

Corollario 3.2. Per ogni punto esistono uniche le curve integrali del campo geodetico definite per un suo intorno di posizioni iniziali, una sfera centrata in 0 di velocità iniziali e un intervallo di tempi $(-\varepsilon, \varepsilon)$ a dipendenza C^∞ dalle condizioni iniziali.

$$\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \{(q, v) \in TM \mid q \in V, v \in T_p M, |v| < \delta_1\} \rightarrow \pi^{-1}(U)$$

Dimostrazione. Teorema grosso sui campi vettoriali. \square

Proposizione 3.9. Per ogni punto esistono uniche le geodetiche definite per un suo intorno di posizioni iniziali, una sfera centrata in 0 di velocità iniziali e un intervallo di tempi $(\varepsilon, \varepsilon)$ a dipendenza C^∞ dalle condizioni iniziali.

Esempio. I cerchi massimi opportunamente parametrizzati sono evidentemente tutte e sole le geodetiche della sfera rotonda.

Lemma 3.4 (di omogeneità). Ogni geodetica $\gamma(t, q, v)$ definita in $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ può essere vista come una geodetica di velocità av definita per $t \in \left(-\frac{\varepsilon}{a}, \frac{\varepsilon}{a}\right)$

Proposizione 3.10. Se non mi importa della velocità iniziale posso avere geodetiche definite per $t \in (2, 2)$.

Dimostrazione. $\gamma(t, q, v) \rightarrow \gamma(t, q, \varepsilon v/2)$. □

Nota. Volendo potevamo rendere la velocità uniformemente grande.

Definizione. La mappa esponenziale sugli intorno aperti di $(p, 0) \in TM$ come sopra associa ad una coppia di condizioni iniziali il punto raggiunto a $t = 1$:

$$\exp(q, w) = \gamma(1, q, w)$$

Proposizione 3.11. $\exp_q(w) = \exp(q, w)$ è un diffeomorfismo locale tra un intorno dell'origine in T_qM e un intorno di q .

Dimostrazione. Si può applicare il teorema della funzione inversa sapendo che

$$d(\exp_q)_0(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\exp_q(tv)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\gamma(1, q, tv)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\gamma(t, q, v)) = v$$

□

Definizione. Una varietà riemanniana è geodeticamente completa se tutte le geodetiche sono definite per tutti i tempi.

Esempio. Nello spazio euclideo le geodetiche sono le rette a velocità costante e sono definite per tutti i tempi, quindi \mathbb{R}^d è geodeticamente completo. La mappa esponenziale è l'identificazione $T_p\mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d$.

Esempio. La sfera rotonda è geodeticamente completa e la mappa esponenziale identifica iniettivamente un disco aperto di raggio πr con la sfera stessa meno il punto antipodale.

Esempio. Il semipiano iperbolico è geodeticamente completo.

Definizione. Il tensore di curvatura di Riemann è la curvatura della connessione di Levi-Civita.

Teorema 3.1. Le isometrie preservano il tensore di curvatura.

Dimostrazione. Basta usare la formula in coordinate locali. □

Proposizione 3.12. Abbassando un indice si può definire il tensore di Riemann in forma completamente covariante:

$$\tilde{R}(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y), Z, T)$$

che ha le stesse simmetrie di $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\mu\nu}$, cioè $\tilde{R} \in S^2(\Lambda^2(M) \otimes \Lambda^2(M))$.

Dà inoltre per ogni coppia (X, Y) una mappa C^∞ -bilineare antisimmetrica

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(M) \otimes \mathfrak{X}(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\ (Z, T) &\mapsto \tilde{R}(X, Y, Z, T) \end{aligned}$$

Dimostrazione. L'identità di Bianchi e l'antisimmetria nelle prime due variabili discendono dalle proprietà del commutatore di campi vettoriali.

L'antisimmetria nelle ultime due variabili equivale a

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X, Y, Z, Z) &= g(\nabla_X \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, Z) \\
&= Yg(\nabla_X Z, Z) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) - Xg(\nabla_Y Z, Z) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) + \frac{1}{2}[X, Y](g(Z, Z)) \\
&= \frac{1}{2}Y(X(g(Z, Z))) - \frac{1}{2}X(Y(g(Z, Z))) + \frac{1}{2}[X, Y](g(Z, Z)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

dove si è usata la metricità della connessione.

La simmetria nei due blocchi si ottiene sommando tutte le possibili identità di Bianchi e cancellando i termini antisimmetrici. \square

Nota. In componenti:

$$\tilde{R}_{ijkl} = R_{ijk}^s g_{sl}$$

Il tensore di Riemann in forma covariante di una 2-varietà riemanniana ha un'unica componente non nulla, \tilde{R}_{1212} , che coincide con la curvatura di Gauss della superficie.

3.5 Curvatura sezionale e forme spaziali

Definizione. In uno spazio vettoriale a prodotto interno denotiamo con

$$|v \wedge w| = \sqrt{|v||w| - \langle v, w \rangle^2}$$

l'area del parallelogramma determinato da v e w .

Lemma 3.5. Data una base v, w di un sottospazio $\sigma \subset T_p M$ di dimensione 2, la sua curvatura sezionale

$$K(v, w) = \frac{\tilde{R}(v, w, v, w)}{|v \wedge w|^2}$$

non dipende dalla base ed è quindi ben definita.

Dimostrazione. Possiamo passare da una base all'altra mediante mosse di Gauss, che lasciano la curvatura sezionale inalterata. \square

Lemma 3.6. Dati due tensori 4-covarianti con simmetrie del tensore di Riemann \tilde{R} e \tilde{R}' , se per ogni $\sigma \subset T_p M$ le due curvatures sezionali indotte coincidono, allora $\tilde{R} = \tilde{R}'$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(v, w, v, w) &= \tilde{R}'(v, w, v, w) \\
\tilde{R}(v + z, w, v + z, w) &= \tilde{R}'(v + z, w, v + z, w) \\
\tilde{R}(v, w, z, w) &= \tilde{R}'(v, w, z, w) \\
\tilde{R}(v, w + t, z, w + t) &= \tilde{R}'(v, w + t, z, w + t) \\
\tilde{R}(v, w, z, t) + \tilde{R}(v, t, z, w) &= \tilde{R}'(v, w, z, t) + \tilde{R}'(v, t, z, w) \\
\tilde{R}(v, w, z, t) - \tilde{R}'(v, w, z, t) &= \tilde{R}(w, z, v, t) - \tilde{R}'(w, z, v, t)
\end{aligned}$$

Le ultime due dicono che $\tilde{R} - \tilde{R}'$ è invariante per permutazioni cicliche dei primi tre argomenti. Per l'identità di Bianchi:

$$3(\tilde{R} - \tilde{R}') = 0$$

da cui la tesi. □

Definizione. Una varietà riemanniana ha curvatura sezionale costante se per ogni punto ogni σ ha la stessa curvatura sezionale.

Proposizione 3.13. Una varietà riemanniana ha curvatura sezionale costante se e solo per ogni punto e vettori tangenti

$$\tilde{R}(v, w, z, t) = K_0(g_p(v, z)g_p(w, t) - g_p(w, z)g_p(v, t))$$

Definizione. Questo tensore 4-covariante ha le simmetrie del tensore di Riemann.

Corollario 3.3. Scelta una base ortonormale in un punto, la curvatura sezionale è costante in quel punto se e solo se

$$\tilde{R}_{ijkl} = K_0(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$$

vale a dire $\tilde{R}_{ijjj} = -\tilde{R}_{jjji} = K_0$ e $\tilde{R}_{ijkl} = 0$ altrimenti.

Esempio. Mostriamo che la sfera rotonda ha curvatura sezionale costante $K_0 = \frac{1}{r^2}$. Questo mostra che nessuna porzione della sfera è isometrica a una porzione dello spazio euclideo.

Il campo normale $N(p) = p/r$ è ortogonale a $T_p S^d$ in ogni punto, e ha norma unitaria, pertanto lo possiamo usare per proiettare la connessione dello spazio ambiente sulla sfera:

$$\nabla_X Y = X(Y) - g_e(X(Y), N)N$$

Siccome $Y \perp N$

$$0 = X(g_e(Y, N)) = g(X(Y), N) + g(Y, X(N))$$

ma siccome $X(N) = dN(X) = dI(X)/r = X/r$ abbiamo

$$g_e(X(Y), N) = -\frac{1}{r}g(X, Y)N$$

Cioè la connessione è

$$\nabla_X Y = X(Y) + \frac{1}{r}g_e(X, Y)N$$

La curvatura è quindi

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z \\
&= \nabla_Y \left(X(Z) + \frac{1}{r} g_e(X, Z) N \right) \\
&\quad - \nabla_X \left(Y(Z) + \frac{1}{r} g_e(Y, Z) N \right) \\
&\quad + [X, Y](Z) + \frac{1}{r} g_e([X, Y], Z) N \\
&= Y(X(Z)) + \frac{1}{r} Y(g_e(X, Z) N) + \frac{1}{r} g_e(Y, \nabla_X Z) N \\
&\quad - X(Y(Z)) - \frac{1}{r} X(g_e(Y, Z) N) - \frac{1}{r} g_e(X, \nabla_Y Z) N \\
&\quad + [X, Y](Z) + \frac{1}{r} g_e([X, Y], Z) N \\
&= \frac{1}{r} (g_e(\nabla_Y X, Z) + g_e(X, \nabla_Y Z)) N + \frac{1}{r} g_e(X, Z) Y(N) \\
&\quad + \frac{1}{r} g_e(Y, \nabla_X Z) N \\
&\quad - \frac{1}{r} (g_e(\nabla_X Y, Z) - g_e(Y, \nabla_X Z)) N - \frac{1}{r} g_e(Y, Z) X(N) \\
&\quad - \frac{1}{r} g_e(X, \nabla_Y Z) N \\
&\quad + \frac{1}{r} g_e([X, Y], Z) N
\end{aligned}$$

e quindi

$$\tilde{R}(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y), Z, W) = \frac{1}{r^2} (g(X, Z)g(Y, W) - g(Y, Z)g(X, W))$$

da cui la tesi.

Nota. Il semipiano iperbolico ha curvatura sezionale costante $K_0 = -\frac{1}{r^2}$.

Definizione. Una forma spaziale è una varietà riemanniana geodeticamente completa di curvatura sezionale costante.

Teorema 3.2 (Killing-Hopf). Ogni forma spaziale semplicemente connessa di curvatura sezionale costante è isometrica a:

- lo spazio euclideo se è piatta
- la sfera rotonda se ha curvatura positiva
- lo spazio iperbolico se ha curvatura negativa

4 Geometria симплетtica

4.1 Algebra lineare

Definizione. Una forma симплетtica su uno spazio vettoriale è una 2-forma antisimmetrica non degenere, cioè che se $\omega(v, w) = 0$ per ogni w allora $v = 0$.

Nota. Dal fatto che non sia degenera otteniamo un isomorfismo canonico $V \rightarrow V^*, v \mapsto \iota_v w$, e inoltre che V è di dimensione pari, perché se $\Omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$

$$\det \Omega = \det -\Omega^t = (-1)^k \det \Omega^t = (-1)^k \det \Omega$$

Esempio. L'archetipo è \mathbb{R}^{2d} con la forma

$$\omega_0 = \sum_i e^{2i-1} \wedge e^{2i}$$

e quindi la matrice associata ad ω_0 è

$$\Omega_0 = \text{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$\omega_0^d = d! e^1 \wedge e^{2d}$ è una forma di volume.

Esempio. Dato uno spazio vettoriale W lo spazio $W \oplus W^*$ con la forma

$$\omega((u, \varphi), (w, \psi)) = \psi(u) - \varphi(w)$$

è uno spazio vettoriale simplettico.

Definizione. L'ortogonale simplettico di un sottoinsieme è

$$W^\omega = \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0 \forall w \in W\}$$

Lemma 4.1. Per ogni sottospazio $\dim W + \dim W^\omega = \dim V$

Dimostrazione. L'isomorfismo nel duale identifica W^ω con l'annullatore di W . □

Definizione. Un sottospazio si dice

- simplettico se è disgiunto dal suo ortogonale
- isotropo se è contenuto strettamente nel suo ortogonale
- lagrangiano se coincide con il suo ortogonale

Segue dal lemma che un sottospazio è lagrangiano se e solo se $\dim W = \frac{1}{2} \dim V$ e $\omega|_W = 0$.

Definizione. Una base simplettica è una base per cui

$$\begin{aligned} \omega(q_i, q_j) &= 0 \\ \omega(p_i, p_j) &= 0 \\ \omega(q_i, p_j) &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

Si chiama simplettica perché i $\langle q_i, p_i \rangle$ sono sottospazi simplettici.

Teorema 4.1. Ogni spazio vettoriale simplettico ammette una base simplettica.

Dimostrazione. Dato q_1 troviamo un \tilde{p}_1 per cui $\omega(q_1, \tilde{p}_1) \neq 0$.

Poniamo

$$p_1 = \frac{\tilde{p}_1}{\omega(q_1, \tilde{p}_1)}$$

Il sottospazio generato è simplettico perché da una combinazione di q_1 e p_1 posso estrarre i coefficienti moltiplicando simpletticamente per p_1 e $-q_1$.

Ripetendo il procedimento si ottiene una base simplettica. \square

Definizione. Un isomorfismo lineare è un simplettomorfismo lineare se porta indietro una forma sull'altra.

Corollario 4.1. Ogni spazio vettoriale simplettico è linearmente simplettomorfo a $(\mathbb{R}^{2d}, \omega_0)$.

Dimostrazione. In una base simplettica

$$\omega = q^1 \wedge p^1 + \dots q^d \wedge p^d$$

Il simplettomorfismo è dato da

$$\psi(q_i) = e_{2i-1}$$

$$\psi(p_i) = e_{2i}$$

\square

Corollario 4.2. Una 2-forma antisimmetrica è non degenera se e solo se $\omega^d \neq 0$.

Dimostrazione. Se v è un vettore degenera per ω , ω^d si annulla su una base contenente v .

Se ω è non degenera $\omega^d = \psi^*(\omega_0^d)$ è una forma di volume. \square

4.2 Varietà

Definizione. Una forma simplettica su una varietà differenziale è una 2-forma chiusa non degenera.

Nota. La varietà ha dimensione pari, e ω fornisce un isomorfismo musicale e una forma di volume ω^d , perciò la varietà è orientabile.

Nota. Se la varietà è compatta, ω non può essere esatta, perché se fosse $\omega = d\tau$ avremmo una forma di volume esatta $\omega^d = d(\tau \wedge \omega^{d-1})$, assurdo. Pertanto il secondo gruppo di coomologia di de Rham di una varietà simplettica compatta non è banale.

In particolare, l'unica sfera che ammette una struttura simplettica è S^2 .

Nota. In coordinate locali scriviamo:

$$\omega|_U = \sum_{i < j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

dove ω_{ij} è la forma valutata sui campi coordinati.

Definizione. Un simplettomorfismo è un diffeomorfismo che porta indietro una forma sull'altra.

Nota. Il gruppo dei simplettomorfismi di una varietà simplettica compatta di dimensione $\dim \geq 2$ è infinito dimensionale.

Esempio. \mathbb{R}^d con la 2-forma

$$\omega = \sum_i dr^{2i-1} \wedge dr^{2i}$$

è una varietà simplettica.

Esempio. Il prodotto di due varietà simplettiche può essere dotato di infinite strutture simplettiche date da combinazioni lineari dei pullback delle forme di partenza mediante le proiezioni. Scelte tipiche sono somma e differenza.

Esempio. Il toro bidimensionale è una varietà simplettica con la forma

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2$$

e così lo è ogni sua potenza.

Lo si può vedere anche come quoziente di \mathbb{R}^{2d} mediante traslazioni, che sono simplettomorfismi.

Esempio. La sfera bidimensionale ammette la forma simplettica

$$\omega_p(v, w) = \langle p, v \times w \rangle$$

dove abbiamo identificato lo spazio tangente ad un punto con il piano ad esso ortogonale in \mathbb{R}^3 .

La forma è automaticamente chiusa e non degenere per le proprietà del prodotto vettoriale.

Esempio. Il cilindro

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z \in (-1, 1)\}$$

(diffeomorfo a $S^1 \times (-1, 1)$) ammette la forma simplettica

$$\omega = \alpha \wedge dz$$

Esempio. La forma tautologica sul fibrato cotangente è un potenziale simplettico:

$$\omega = -d\lambda$$

è non degenere, come si vede scrivendola in coordinate locali.

Dato che lo spazio cotangente a un punto nello spazio delle fasi (q, p) è $T_p M \times T_p^* M$ scriviamo il suo momento come

$$p = \sum_i p_i(p) dq^i|_q$$

dove le p_i sono le coordinate sullo spazio cotangente a q , e un vettore tangente

$$(v, p_v) = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial q^i} + p_i(p_v) dq^i$$

così che

$$\lambda_{q,p}(v, p_v) = p(d\pi_{q,p}(v, p_v)) = p\left(\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial q^i}\right) = \sum_j p_j dq^j \left(\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial q^i}\right) = \sum_i p_i(p) v_i$$

e pertanto $\lambda = \sum_i p_i dq_i$, e quindi $d\lambda = \sum_i dp_i|_p \wedge dq^i|_q$, che è chiaramente non degenera.

Esempio. Sul gruppo continuo di Heisenberg N , le forme

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= dx \\ \alpha_2 &= dy \\ \alpha_3 &= dz - ydx\end{aligned}$$

sono invarianti a sinistra ($L_{\gamma(\alpha)=\alpha}^*$) per azioni del gruppo discreto e quindi passano al quoziente, N . Abbiamo

$$\begin{aligned}d\alpha_1 &= 0 \\ d\alpha_2 &= 0 \\ d\alpha_3 &= d\alpha_1 \wedge d\alpha_2\end{aligned}$$

Su $KT = N \times S^1$ consideriamo la forma $\omega = \alpha_1 \wedge \alpha_4 + \alpha_2 \wedge \alpha_3$ dove α_4 è la famosa forma di S^1 . Non è degenera perché $\omega^2 = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4$, ed è chiusa.

Questa 4-varietà simplettica si chiama varietà di Kodaira-Thurston.

Nota. Condizioni necessarie per ammettere struttura simplettica sono la dimensione pari e l'orientabilità. Gromov ha dimostrato che una varietà aperta ammette una struttura simplettica se e solo se ammette una 2-forma non degenera. Su varietà compatte il problema è aperto.

4.3 L'argomento di Moser

Definizione. Un'isotopia è una famiglia ad un parametro di diffeomorfismi dove $\psi_0 = Id$

È un concetto più generale di un gruppo di diffeomorfismi perché possiamo comunque associargli un campo vettoriale, che però dipende dal tempo, cioè una famiglia ad un parametro di campi vettoriali

$$X_t(p) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \psi(s)(\psi_t^{-1}(p))$$

così che

$$\frac{d\psi_t}{dt} = X_t \circ \psi_t$$

Viceversa da un campo vettoriale dipendente dal tempo che è anche completo otteniamo un'isotopia che soddisfa quest'equazione, o in generale un'isotopia locale.

La derivata di Lie di una forma rispetto ad un campo vettoriale dipendente dal tempo è

$$\mathcal{L}_{X_t}\omega = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_t^*\omega$$

Proposizione 4.1.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\psi_t^*\omega &= \psi_t^*\mathcal{L}_{X_t}\omega \\ \frac{d}{dt}\psi_t^*\omega_t &= \psi_t^*\left(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt}\right)\end{aligned}$$

Nota. Nel caso speciale in cui X non dipende dal tempo e ψ_t è un gruppo a un parametro (locale) di diffeomorfismi abbiamo

$$\frac{d}{dt}\psi_t^*\omega = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\psi_{t+s}^*\omega = \frac{d}{dt}\Big|_{s=0}\psi_t^*(\psi_s^*(\omega)) = \psi_t^*\left(\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\psi_s^*\omega\right) = \psi_t^*\mathcal{L}_X\omega$$

Dimostrazione. La prima equazione è valida sulle funzioni:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\psi_t^*(f)(p) &= \frac{d}{dt}(f \circ \psi_t)(p) \\ &= df_{\psi_t(p)}\left(\frac{d\psi_t}{dt}\right) \\ &= df_{\psi_t(p)}(X_t(\psi_t(p))) \\ &= (\mathcal{L}_{X_t})(\psi_t(p)) \\ &= \psi_t^*\mathcal{L}_{X_t}f\end{aligned}$$

e dalla formula magica di Cartan e dalle proprietà del pullback entrambi i lati commutano con d e sono derivazioni.

Per la seconda, data una funzione di due variabili la regola della catena dà

$$\frac{d}{dt}f(t, t) = \frac{d}{dx}f(x, t)\Big|_{x=t} + \frac{d}{dy}f(t, y)\Big|_{y=t}$$

e quindi

$$\frac{d}{dt}\psi_t^*\omega_t = \frac{d}{dx}\psi_x^*(\omega_t)\Big|_{x=t} + \frac{d}{dy}\psi_t^*\omega_y\Big|_{y=t} = \psi_t^*\left(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt}\right)$$

□

Nota (L'argomento di Moser). Se la derivata temporale di una famiglia a un parametro di forme simplettiche su una sottovarietà compatta è esatta:

$$\frac{d\omega_t}{dt} = d\sigma_t$$

allora tutte le forme sono legate da un'isotopia

$$\psi_t^*\omega_t = \omega_0$$

L'idea è di costruire l'isotopia a partire da un campo vettoriale dipendente dal tempo

$$0 = \frac{d}{dt}\psi_t^*\omega_t = \psi_t^*\left(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt}\right) = \psi_t^*(d\iota_{X_t}\omega_t + d\sigma_t)$$

dato che tutte le ω_t sono esatte. Questo si traduce in

$$\iota_{X_t}\omega_t + \sigma_t = 0$$

che ha soluzione unica perché tutte le ω_t sono non degeneri.

Nota. Va bene anche se la varietà non è compatta pur che controlli il dominio di soluzione dell'equazione differenziale.

Proposizione 4.2. Due 2-forme chiuse su una sottovarietà compatta P di una varietà di dimensione pari che coincidono su P e sono forme simplettiche sui singoli spazi tangenti, sono legate da un diffeomorfismo definito su un intorno di P che la lascia invariata.

Dimostrazione. Supponiamo di avere una 1-forma locale che si annulla sugli spazi tangenti a P e $d\sigma = \omega_1 - \omega_0$. Denotiamo con

$$\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0) = \omega_0 + td\sigma$$

il segmento che unisce ω_0 e ω_1 e sia $\sigma_t = td\sigma$. Allora ogni ω_t è chiusa e, eventualmente restringendo, non degenera.

Applicando l'argomento di Moser otteniamo un campo vettoriale dipendente dal tempo che si annulla su P . Eventualmente restringendo possiamo supporre che l'isotopia associata esista per $t \in [0, 1]$. A questo punto l'isotopia che lega le due forme è ψ_1 .

Vediamo come costruire la 1-forma.

Dotiamo la varietà ambiente di una metrica riemanniana e consideriamo l'intorno

$$W_\varepsilon = \{(p, w) \in TM \mid p \in P, w \in (T_p P)^\perp, |w| < \varepsilon\}$$

Per ε sufficientemente piccolo la restrizione a W_ε della mappa esponenziale è un diffeomorfismo sulla sua immagine.

Definiamo per $t \in [0, 1]$ su $\exp W_\varepsilon$ il diffeomorfismo

$$\varphi_t(\exp(q, w)) = \exp(q, tw)$$

che interpola tutto quello che manca W_ε a $\exp(W_\varepsilon)$

Abbiamo che $\varphi_0(W_\varepsilon) \subset P$, $\varphi_1 = Id_{\exp(W_\varepsilon)}$ e $\varphi_t|_P = id_P$. Pertanto se $\tau = \omega_1 - \omega_0$

$$\varphi_0^*(\tau) = 0$$

$$\varphi_1^*(\tau) = \tau$$

Siccome i φ_t sono diffeomorfismi possiamo definire il campo vettoriale

$$Y_t = \left(\frac{d\varphi_t}{dt} \right) \circ \varphi_t^{-1}$$

che diventa singolare per $t = 0$. Tuttavia

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\tau = \varphi_t^*\mathcal{L}_{X_t}\tau = d(\varphi_t^*(\iota_{Y_t}\tau)) = d\xi_t$$

dove $(\xi_t)_p(v) = \tau_{\varphi_t(p)}(Y_t, d\varphi_t(v))$ definisce una famiglia a un parametro di 1-forme che si annullano su P .

Abbiamo allora

$$\omega_1 - \omega_0 = \tau = \varphi_1^*\tau - \varphi_0^*\tau = \int_0^1 \frac{d}{dt}\varphi_t^*\tau dt = \int_0^1 d\xi_t dt = d \int_0^1 \xi_t dt = d\sigma$$

dove $\sigma = \int_0^1 \xi_t dt$. □

Teorema 4.2 (Darboux). Ogni varietà simplettica è localmente simplettomorfa a $(\mathbb{R}^{2d}, \omega_0)$.

Dimostrazione. Dato un punto costruiamo una base simplettica sul suo spazio tangente. Dato che ω e $\sum_i dx^{2i-1} \wedge dx^{2i}$ coincidono nel punto, possiamo applicare la proposizione precedente alla sottovarietà compatta $P = p$. \square

Corollario 4.3. Ogni carta locale si può scegliere in modo che la forma simplettica abbia la forma canonica. Queste coordinate si dicono coordinate di Darboux.

4.4 Meccanica hamiltoniana

Definizione. Un campo vettoriale è simplettico se $\mathcal{L}_X\omega = 0$.

Lemma 4.2. Sono equivalenti:

- (i) Un campo vettoriale è simplettico
- (ii) La forma simplettica è invariante sotto azione del gruppo a un parametro locale di diffeomorfismi di X
- (iii) La forma $\iota_X\omega$ è chiusa.

Dimostrazione. (1) \iff (2) segue dalla definizione di derivata.

(1) \iff (3) segue dalla formula magica di Cartan

$$d\iota_X\omega = \mathcal{L}_X\omega - \iota_X d\omega = \mathcal{L}_X\omega$$

\square

Esempio. Su S^2 consideriamo la forma simplettica $\omega = d\vartheta \wedge dh$. Il campo $\frac{\partial}{\partial\vartheta}$ soddisfa $d\iota_X\omega = d(dh) = 0$ quindi è simplettico. Le sue curve integrali sono i paralleli, il suo flusso è l'azione di S^1 . Inoltre

$$\psi_t^*(\omega) = \psi_t^*(d\vartheta \wedge dh) = d(\vartheta + t) \wedge dh = d\vartheta \wedge dh = \omega$$

Esempio. Sul toro consideriamo la forma simplettica $d\vartheta_1 \wedge d\vartheta_2$ si considera il campo $\frac{\partial}{\partial\vartheta_1}$. Basically tutto uguale.

Definizione. Un campo vettoriale è hamiltoniano se $\iota_X\omega$ è esatta, e il suo potenziale è la sua hamiltoniana.

Nota. Ogni campo hamiltoniano è simplettico.

Nota. Se scegliamo coordinate di Darboux localmente

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial f}{\partial p^i} dp^i$$

quindi

$$X_f = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i} \right)$$

La curva integrale di X_f diventa

$$\dot{\sigma}_x(t) = \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p^i} \right)$$

e valgono le equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial f}{\partial p^i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial f}{\partial q^i} \end{cases}$$

Definizione. Il sottogruppo a un parametro locale di un campo hamiltoniano si chiama flusso di fase.

Teorema 4.3 (Liouville). Il flusso di fase preserva l'hamiltoniana, cioè le sue curve integrali sono contenute in insiemi di livello di f .

Dimostrazione.

$$\frac{d}{dt}(f \circ \psi_t)(p) = df_{\psi_t(p)}(X_f(\psi_t(p))) = \omega(X_f(\psi_t(p)), X_f(\psi_t(p))) = 0$$

□

Esempio. Consideriamo su T^*R le coordinate (q, p) la forma $\omega = dq \wedge dp$. L'hamiltoniana dell'oscillatore armonico

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2 \\ dH &= \frac{1}{m}pdp + kq dq \\ X_H &= \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} - kq \frac{\partial}{\partial p} \end{aligned}$$

che dà come curve integrali

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -kq \end{cases}$$

Esempio. Date coordinate $(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$ sul fibrato tangente di \mathbb{R}^3 , definiamo i momenti di una configurazioni come

$$p_i(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = m v_i$$

Allora $(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ sono coordinate globali su $T^*\mathbb{R}^3$. La forma simplettica si scrive

$$\omega = \sum_i dq^i \wedge dp^i$$

Esempio. Il campo $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$ su S^2 è il campo dell'hamiltoniana h .

Esempio. Il campo $\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}$ su T^2 non è hamiltoniano perché gira dentro a un buco.

Nota. Se il primo gruppo di coomologia è banale, ogni campo simplettico è hamiltoniano.

Proposizione 4.3. Il commutatore di campi simplettici è hamiltoniano con hamiltoniana $-\omega(X, Y)$.

Definizione. La parentesi di Poisson di due funzioni è

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p^i} - \frac{\partial f}{\partial p^i} \frac{\partial g}{\partial q^i} = X_g(f) = -X_f(g)$$

Proposizione 4.4. La parentesi di Poisson rende le funzioni sulla varietà un'algebra di Lie e $f \mapsto X_f$ è un antimorfismo con l'algebra dei campi vettoriali.

Dimostrazione. Mostriamo che $X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g]$

$$\omega(X_{\{f, g\}}, Z) = d\{f, g\}(Z) = d(\omega(X_f, X_g))(Z) = -\omega([X_f, X_g], Z)$$

A questo punto basta usare l'antisimmetria delle parentesi per trasportare dai campi vettoriali sulle funzioni l'identità di Jacobi. \square

Definizione. Un sistema hamiltoniano è una varietà симпlettica con un'hamiltoniana.

Teorema 4.4 (Noether). Una funzione Poisson-commuta con l'hamiltoniana se e solo se è costante lungo le curve integrali del campo hamiltoniano, cioè è una costante del moto.

Dimostrazione. Se ψ_t è il flusso di fase

$$\frac{d}{dt}(f \circ \psi_t)(p) = df_{\psi_t(p)}(X_H(\psi_t(p))) = \omega(X_f(\psi_t(p)), X_H(\psi_t(p))) = \{f, H\}(\psi_t(p))$$

\square

Lemma 4.3. Il massimo numero di funzioni indipendenti su un aperto denso e in involuzione è il numero di gradi di libertà $\frac{1}{2} \dim M$.

Dimostrazione. Se p è regolare per tutte le funzioni allora i corrispettivi campi hamiltoniani sono non nulli in quel punto e

$$\omega(X_{f_j}, X_{f_k}) = \{f_j, f_k\} = 0$$

quindi i vettori $\{X_{f_i}(p)\}$ generano un sottospazio isotropo. \square

Definizione. Un sistema hamiltoniano è (completamente) integrabile se ha una costante del moto per ogni grado di libertà.

Esempio. L'oscillatore armonico, il pendolo sferico, il moto di una particella in un campo centrale.

Lemma 4.4. Gli insiemi di livello simultanei di valori regolari delle costanti del moto di un sistema integrabile sono sottovarietà lagrangiane.

Dimostrazione. Denotiamo con $X_j = X_{f_j}$, ciascuno dei quali è non nullo nella preimmagine di un valore regolare ed è tangente all'insieme di livello L :

$$dF(X_j) = (df_1(X_j), \dots, df_d(X_j)) = (\{f_1, f_j\}, \dots, \{f_d, f_j\}) = 0$$

pertanto i campi formano una base per gli spazi tangenti a L . Dato che $\omega(X_i, X_j) = \{f_i, f_j\} = 0$ gli spazi tangenti ai punti di L sono lagrangiani.

Se ogni campo è completo abbiamo un'azione di \mathbb{R}^d su L

$$\Psi(t_1, \dots, t_d, p) = (\psi_{t_1}^1, \dots, \psi_{t_d}^d)(p)$$

mediante traslazioni lungo le loro curve integrali. Che sia un'azione discende dal fatto che i campi commutano e pertanto commutano i flussi.

Questo mostra che ogni componente connessa di L è $\mathbb{R}^k \times T^{d-k}$. Se L è compatta, è un toro, detto toro di Liouville. \square

Teorema 4.5 (Arnold-Liouville). Dato un sistema integrabile con $F : M \rightarrow \mathbb{R}^d$, $F = (H, f_2, \dots, f_d)$ e c un valore regolare:

- (i) $F^{-1}(c)$ è una sottovarietà lagrangiana di M .
- (ii) Se i flussi dei campi hamiltoniani uscenti da p sono definiti per ogni tempo, la componente connessa L di $F^{-1}(c)$ è uno spazio omogeneo per \mathbb{R}^d e ha coordinate $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ dette variabili angolo, nelle quali i flussi sono lineari.
- (iii) Esistono variabili I_1, \dots, I_d dette azione (raggio), complementari alle variabili angolo, che sono costanti del moto e completano ad un insieme di coordinate di Darboux.

Esempio. Le variabili azione-angolo per l'oscillatore armonico sono raggio e angolo nel piano delle fasi (riscalati).

5 Fibrati vettoriali

Esempio.

- La proiezione che trasla un vettore al centro della sfera è suriettiva ma non iniettiva.
- Se teniamo conto della coda del vettore invece otteniamo una mappa iniettiva con cui possiamo topologizzare TS^2 come sottospazio di $S^2 \times \mathbb{R}^3$ formato dai vettori ortogonali al punto base.
- TS^2 è così uno spazio topologico ma anche l'unione disgiunta degli spazi tangenti ai punti della sfera, cioè una famiglia continua di spazi vettoriali parametrizzati dai punti di S^2 .
- Anche $S^2 \times \mathbb{R}^2$ ha questa proprietà, ma se fossero uguali potremmo costruire un campo vettoriale mai nullo sulla sfera, assurdo.
- Per $n = 1, 3, 7$ il fibrato tangente alla sfera è banale perché possiamo ruotare un vettore che rappresenta il punto sulla sfera ad un vettore tangente nel numero necessario di modi moltiplicandolo per le varie unità immaginarie dell'algebra di divisione corrispondente. Sono le uniche sfere con fibrato banale.
- Anche se TS^2 non è banale posso proiettare localmente un vettore tangente a un punto sullo stesso emisfero di x sul piano tangente P a x , traslato all'origine. Quindi il pezzettino di fibrato con basi in un intorno U di x è identificabile con $U \times P$, e $p^{-1}(y) \cong \{y\} \times P$ è un isomorfismo lineare.

5.1 Definizioni

Definizione. Un fibrato vettoriale n -dimensionale è una mappa $p : E \rightarrow B$ con una struttura di spazio vettoriale su ogni fibra $p^{-1}(b)$ per ogni punto di base, che soddisfa la condizione di banalità locale: posso ricoprire la base di aperti la cui preimmagine è omeomorfa a $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ con $p^{-1}(b) \cong \{b\} \times \mathbb{R}^n$.

Questi omeomorfismi compongono la banalizzazione locale.

Nota. Si potrebbe prendere \mathbb{C} ma anche no.

Esempio. Il fibrato banale $E = B \times \mathbb{R}^n$ con la proiezione sulla prima componente.

Esempio. Il fibrato di Möbius, un fibrato di linea $I \times \mathbb{R}/\{(0, t) \sim (1, -t)\}$ con la proiezione al primo fattore che passa al quoziente come $p : E \rightarrow S^1$. Sarebbe un nastro di Möbius aperto.

Esempio. Il fibrato tangente alla sfera unitaria descritto sopra.

Esempio. Il fibrato normale alla sfera è un fibrato di linea formato dai multipli del punto della sfera. Le banalizzazioni locali sono come nel fibrato tangente.

Esempio. Il fibrato tautologico sullo spazio proiettivo dove la fibra attaccata ad un punto è la retta che il punto rappresenta.

Esempio. Lo spazio proiettivo reale infinito dimensionale è l'unione di tutti gli spazi proiettivi con la topologia del limite diretto, per cui un insieme è aperto se interseca tutti gli spazi in un aperto. Le inclusioni di spazi euclidei inducono inclusioni di spazi proiettivi e inclusioni di fibrati tautologici.

Esempio. Il fibrato tautologico sullo spazio proiettivo reale ha un complemento ortogonale, dove la fibra associata a una linea è il suo sottospazio ortogonale.

Esempio. Ogni grassmanniana ha un fibrato tautologico e un suo ortogonale allo stesso modo.

Definizione. Un isomorfismo di fibrati vettoriali è un omeomorfismo degli spazi totali che manda fibre in fibre mediante isomorfismi lineari.

Esempio. Il fibrato normale alla sfera è isomorfo al fibrato di linea banale, e, per S^1 , al fibrato tangente.

Esempio. Il fibrato di Möbius è isomorfo al fibrato tautologico su $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$.

Definizione. Una sezione di un fibrato vettoriale è una mappa che assegna a ogni punto della base un vettore della fibra, ovvero un'inversa destra della proiezione.

Nota. A volte si possono distinguere fibrati non isomorfi esaminando il complemento della sezione nulla. Tagliando a metà un nastro di Möbius lui rimane connesso, a differenza di un cilindro.

Nota. Non tutti i fibrati hanno sezioni mai nulle, per esempio il fibrato tangente alla sfera pari, che quindi non è di sicuro banale.

Proposizione 5.1. Un fibrato è banale se ha n sezioni linearmente indipendenti in ogni punto.

Dimostrazione. Date n sezioni indipendenti s_i la mappa

$$h : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$$

$$h(b, t_1, \dots, t_n) = \sum_i t_i s_i(b)$$

è un isomorfismo lineare in ogni fibra ed è continuo, pertanto è un isomorfismo grazie al seguente lemma: \square

Lemma 5.1. Se la base è la stessa, basta verificare che la mappa sia continua e che sia isomorfismo lineare sulle fibre.

Dimostrazione. Segue dall'ipotesi che h è biunivoca, ma bisogna mostrare che h^{-1} è continua.

Essendo una questione locale, restringiamo ad un aperto della base sul quale entrambi i fibrati sono banali. La questione si riduce a mappe

$$h(x, v) = (x, g_x(v))$$

dove g_x è una matrice invertibile. Dato che l'inversione è una mappa continua in GL abbiamo che

$$h^{-1}(x, v) = (x, g_x^{-1}(v))$$

è continua. \square

Esempio. Il fibrato tangente a $S^1 \subset \mathbb{C}$, $S^3 \subset \mathbb{H}$, $S^7 \subset \mathbb{O}$ è banale perché abbiamo le sezioni

$$p \mapsto (i_1 p, \dots, i_n p)$$

Questo funziona perché in tutte e tre le algebre sia la norma di \mathbb{R}^n è moltiplicativa.

Nota. Un'altra caratterizzazione del fibrato banale è una proiezione continua $E \rightarrow \mathbb{R}^n$.

5.2 Somme e prodotti

Nota. La restrizione ad un aperto della base di un fibrato è un fibrato.

Nota. Il fibrato prodotto

$$p_1 \times p_2 : E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2$$

è un fibrato con banalizzazioni locali che sono il prodotto di quelle dei fattori.

Definizione. Dati due fibrati sulla stessa base il fibrato somma diretta ha come fibre la somma diretta delle fibre:

$$E_1 \oplus E_2 = \{(v_1, v_2 \in E_1 \times E_2 | p_1(v_1) = p_2(v_2))\}$$

Questo fibrato è la restrizione alla diagonale (b, b) del fibrato prodotto.

Nota. La somma di due fibrati non banali può essere banale.

Esempio. La somma diretta dei fibrati tangente e normale alla sfera è il fibrato banale $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$. Si dice che il fibrato tangente alla sfera è stabilmente banale, cioè diventa banale sommandolo con un fibrato banale.

Esempio. Lo stesso accade per lo spazio proiettivo, per esempio nel caso $n = 1$ possiamo scomporre $S^1 \times \mathbb{R}^2$ (ciambella aperta) in due nastri di Möbius ortogonali.

Esempio. Dividendo ambo i membri di

$$S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \cong TS^n \oplus NS^n$$

per l'azione antipodale, otteniamo che un vettore tangente allo spazio proiettivo è una coppia di vettori tangenti antipodali in S^n .

Proposizione 5.2. La somma diretta del fibrato tangente allo spazio proiettivo con un fibrato banale (lo spazio normale allo spazio proiettivo) è la somma diretta di $n + 1$ copie del fibrato tautologico sullo spazio proiettivo.

Dimostrazione. Quozientando tutti i sommandi abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{NS^n}{(x, v) \sim (-x, -v)} &= \frac{NS^n}{(x, tx) \sim (-x, t(-x))} = \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R} \\ \frac{S^n \times \mathbb{R}^{n+1}}{(x, v) \sim (-x, -v)} &= \underbrace{\frac{S^n \times \mathbb{R}}{(x, v) \sim (-x, -v)} \oplus \dots \oplus \frac{S^n \times \mathbb{R}}{(x, v) \sim (-x, -v)}}_{n+1 \text{ volte}} \\ \frac{S^n \times \mathbb{R}}{(x, v) \sim (-x, -v)} &= \frac{NS^n}{(x, v) \sim (-x, (-t)(-x))} \\ &= \frac{NS^n}{(x, v) \sim (-x, tx)} \end{aligned}$$

L'identificazione dei punti antipodali della base permette di considerare le linee, e rimangono comunque tutti i vettori. \square

Corollario 5.1.

La somma diretta di 4 copie di $\mathbb{R}P^3$ è banale

La somma diretta di 8 copie di $\mathbb{R}P^7$ è banale

Dimostrazione. Le sezioni indipendenti su S^3, S^7 passano al quoziente e banalizzano $\mathbb{R}P^3, \mathbb{R}P^7$. \square

Definizione. Un prodotto interno su un fibrato vettoriale è una mappa $E \oplus E \rightarrow \mathbb{R}$ che è un prodotto interno su ogni fibra.

Proposizione 5.3. Fibrati vettoriali paracompatti ammettono prodotti interni.

Dimostrazione. Come le metriche. \square

Definizione. Un sottofibrato vettoriale è un sottospazio dello spazio totale che interseca le fibre in un sottospazio vettoriale.

Proposizione 5.4. Un fibrato vettoriale su base paracompatta ammette scomposizione in somma diretta di ogni suo sottofibrato vettoriale e il suo ortogonale.

Dimostrazione. Costruiamo il sottofibrato ortogonale completando localmente le sezioni indipendenti del sottofibrato a una base del fibrato ambiente e applicando Gram-Schmidt, che poi possiamo restringere ai sottospazi ortogonali alla fibre. \square

Proposizione 5.5. Ogni fibrato vettoriale su base compatta Hausdorff può essere direttamente sommato ad un fibrato vettoriale sulla stessa base per ottenere un fibrato banale.

Dimostrazione. Ogni punto di E ha un intorno U_x sul quale il fibrato è banale. Per il lemma di Urysohn c'è una mappa

$$\varphi_x : B \rightarrow [0, 1]$$

che separa x da U_x^c . Gli insiemi $W_i = \varphi_x^{-1}(0, 1]$ ricoprono la base e per compattezza posso passare a un ricoprimento finito con le funzioni φ_i .

Definiamo

$$\begin{aligned} g_i : E &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ g_i(v) &= \varphi_i(p(v))(\pi_i h_i(v)) \end{aligned}$$

dove $\pi_i h_i$ banalizza localmente e proietta sulla fibra.

Ciascuna delle g_i è un'iniezione lineare sulle fibre su W_i , pertanto possiamo radunarle tutte in una $g : E \rightarrow \mathbb{R}^N$.

La mappa

$$f = p \times g : E \rightarrow B \times \mathbb{R}^n$$

identifica E come sottofibrato di un fibrato banale, e pertanto abbiamo dalla proposizione precedente un suo complementare. \square

Definizione. Il prodotto tensore di due fibrati è l'unione disgiunta dei prodotti delle fibre, con la topologia indotta dai prodotti delle banalizzazioni locali.

Questa topologia è indipendente dalla scelta delle banalizzazioni perché tutte queste differiscono per una matrice invertibile.

Nota. Un fibrato vettoriale con banalizzazioni locali h_α può essere ricostruito come

$$\frac{\coprod_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^n)}{(x, v) \sim h_\beta h_\alpha^{-1}(x, v) \text{ se } x \in U_\alpha \cap U_\beta}$$

Le funzioni $h_\beta h_\alpha^{-1}$ si possono vedere come trasformazioni lineari $g_{\beta\alpha} \in \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ che soddisfano la condizione di cociclo

$$g_{\gamma\beta} g_{\beta\alpha} = g_{\gamma\alpha} \text{ su } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$$

Un insieme di funzioni di assemblaggio di questo tipo è sufficiente a descrivere un fibrato.

Nota. Con questa formulazione, il prodotto tensore di due fibrati può essere definito dai prodotti tensori di funzioni di assemblaggio su una banalizzazione locale comune.

Nota. Il prodotto tensore di fibrati vettoriali è commutativo, associativo, dotato di elemento neutro che è il fibrato di linea banale, distributivo rispetto alla somma diretta.

Questa operazione rende l'insieme $\text{Vect}^1(B)$ di classi di isomorfismi di fibrati di linea su B un gruppo abeliano. L'inverso di un fibrato di linea è il fibrato ottenuto rimpiazzando le funzioni di assemblaggio (numeri reali) con le loro inverse.

Dotando E di un prodotto interno possiamo chiedere che le $g_{\beta\alpha}$ siano isometrie, restringendone così i valori a ± 1 . Le funzioni di assemblaggio di $E \oplus E$ sono i loro quadrati, ovvero $g_{\beta\alpha} = 1$, pertanto $E \oplus E$ è il fibrato banale. Questo mostra che ogni elemento di $\text{Vect}^1(B)$ è idempotente.

Questo va d'accordo col fatto che $\text{Vect}^1(B) \cong H^1(B; \mathbb{Z}_2)$ per basi omotopicamente equivalenti a un CW -complesso.

Nota. Considerando $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(B)$ abbiamo che le funzioni di assemblaggio di $E \oplus E$ hanno valori in S^1 , e infatti $\text{Vect}^1(B) \cong H^1(B; \mathbb{Z})$ (per basi omotopicamente equivalenti a un CW -complesso).

L'inverso si ottiene considerando il fibrato coniugato.

Nota. Si possono definire potenze esterne di un fibrato vettoriale, dove le funzioni di assemblaggio sono $\Lambda^k g_{\beta\alpha}$.

Definizione. Eliminando i riferimenti agli spazi vettoriali e rimpiazzando il modello di fibra \mathbb{R}^n con un generico spazio F otteniamo un generale fibrato.

Esempio. Dato un prodotto interno su un fibrato, possiamo considerare su ogni fibra la sfera unitaria e ottenere il fibrato $S(E) \rightarrow B$. Lo si può definire anche senza prodotto interno identificando una sezione non nulla con tutti i suoi multipli positivi.

Per esempio il fibrato sfera unitaria del fibrato tautologico su $\mathbb{R}P^n$ è S^n .

Allo stesso modo si può definire $D(E)$, oppure $P(E)$.

Esempio. Il fibrato bandiera $F_k(E) = P(E)^k$ di un fibrato vettoriale, che ha come spazio totale e identifica k -ple di rette ortogonali che passano dall'origine nella fibra.

Esempio. Il fibrato di Stiefel $V_k(E) = S(E)^k$ di un fibrato vettoriale formato da k -ple di vettori unitari ortogonali, cioè basi ortonormali.

Esempio. Il fibrato grassmanniano $G_k(E)$ di sottospazi vettoriali k -dimensionali delle fibre, ovvero il fibrato di Stiefel modulo l'identificazione di basi dello stesso sottospazio.

Esercizio 5.1. Un fibrato vettoriale ha k sezioni indipendenti se e solo se ha un sottofibrato banale k -dimensionale.

Esercizio 5.2. Costruisci il quoziente di un fibrato per un suo sottofibrato.

Esercizio 5.3. Il complemento ortogonale di un sottofibrato è indipendente dalla scelta del prodotto interno, salvo isomorfismo.

Proposizione 5.6. Data una mappa tra basi f e un fibrato vettoriale E sulla base di arrivo esiste un fibrato vettoriale f^*E , unico salvo isomorfismo, sulla base di partenza con le fibre isomorfe alle fibre sull'immagine del punto base.

Dimostrazione. $f^*E = \{(a, v) \in A \times E \mid f(a) = p(v)\}$ si definisce con un elegante diagramma commutativo. La proiezione $f^*E \rightarrow A$ fattorizza in

$$f^*E \rightarrow \Gamma_f \rightarrow A \quad (5.2.1)$$

$$(a, v) \mapsto (a, p(v)) = (a, f(a)) \mapsto a \quad (5.2.2)$$

composizione della restrizione del fibrato $1 \times p : A \times E \rightarrow A \times B$ e di un isomorfismo.

Dato un diverso E' che soddisfa le definizioni abbiamo un isomorfismo in f^*E dato da $v' \mapsto (p'(v'), f'(v'))$. \square

Nota. Il pullback di un fibrato banale è banale.

Esempio. La restrizione di un fibrato vettoriale ad un suo sottospazio può essere vista come il pullback rispetto all'inclusione.

Esempio. Il pullback di una mappa costante è un fibrato banale.

Esempio. Il fibrato tangente alla sfera è il pullback del fibrato tangente allo spazio proiettivo mediante la proiezione.

Esempio. Il pullback del fibrato di Möbius $E \rightarrow S^1$ mediante la mappa $f(z) \rightarrow z^2$ è il fibrato banale, perché apro il nastro a metà e ce ne concateno un altro. In generale z^n dà la concatenazione di n nastri, cioè il fibrato banale per n pari e il nastro di Möbius per n dispari.

Esempio. Consideriamo il fibrato di linea $L_i \rightarrow F(E)$ sul fibrato bandiera dove le fibre sono l'asse i . Allora la somma diretta $L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ è il pullback di $E \rightarrow B$ tramite la proiezione $F(E) \rightarrow B$.

Proposizione 5.7.

- (i) $(fg)^* = g^*f^*$
- (ii) $1^* = 1$
- (iii) $f^*(E_1 \oplus E_2) = f^*E_1 \oplus f^*E_2$
- (iv) $f^*(E_1 \otimes E_2) = f^*E_1 \otimes f^*E_2$

Teorema 5.1. Mappe omotope portano indietro un fibrato vettoriale su base paracompatta a fibrati isomorfi.

Dimostrazione. Se $F : A \times I \rightarrow B$ è l'omotopia da f_0 a f_1 i due pullback sono la restrizione di F^*E ad $A \times \{0\}$ e $A \times \{1\}$, quindi il teorema segue dalla seguente \square

Proposizione 5.8. Le restrizioni di un fibrato vettoriale su $X \times I$ agli estremi sono isomorfe se X è paracompatto.

Dimostrazione. Due fatti:

- (i) Un fibrato vettoriale su $X \times [a, b]$ è banale se lo sono le sue restrizioni a $X \times [a, c]$ e $X \times [c, b]$.

Infatti se esistono h_1, h_2 banalizzazioni globali delle due restrizioni possiamo sostituire h_2 con $g_{12}h_2$ in modo che coincidano su $p^{-1}(X \times \{c\})$ e saldarle in una banalizzazione globale.

(ii) Un fibrato vettoriale su $X \times I$ ammette un ricoprimento aperto di X tale che $p^{-1}(U_\alpha \times I) \rightarrow U_\alpha \times I$ è banale.

Infatti per ogni punto basta prendere banalizzazioni tubulari della forma $U_{x,i} \times I_i$ dove gli I_i sono una partizione di I , finita per compattezza di I . Prendendo allora l'intersezione di questi intorni possiamo saldare tutti i cilindretti per il punto (i).

Usando (ii) scegliamo un ricoprimento aperto di X in modo che E è banale su $U_\alpha \times I$.

Se X è compatto Hausdorff le cose sono semplici: passiamo a un sottoinsieme finito U_i e prendiamo una partizione dell'unità subordinata. Sia $\psi_i = \varphi_1 + \dots + \varphi_i$ la somma delle prime i funzioni. Consideriamo i grafici X_i in $X \times I$ e la restrizione $E_i \rightarrow X_i$ del fibrato su di essi. Dato che il fibrato è banale su $U_i \times I$ la proiezione ovvia (omeomorfismo) $X_i \rightarrow X_{i-1}$ induce un omeomorfismo tra i fibrati $E_i \rightarrow E_{i-1}$ che è l'identità al di fuori di $p^{-1}(U_i \times I)$. La composizione di tutte queste composizioni è un isomorfismo dalla restrizione del fibrato a $X \times \{1\}$ alla restrizione a $X \times \{0\}$.

Se X è solo paracompatto abbiamo un ricoprimento numerabile V_i e una partizione dell'unità ad esso subordinata dove ogni V_i è l'eventuale raggruppamento di aperti contenuti nelle pezze U_α . Boh poi tutto uguale lol. \square

Corollario 5.2. Un equivalenza omotopica tra due basi compatte induce una corrispondenza biunivoca tra fibrati vettoriali nella direzione opposta.

In particolare, ogni fibrato vettoriale su base paracompatta contraibile è banale.

Nota. Il teorema vale anche per fibrati generici.

5.3 Funzioni frizione

Esempio. La sfera è l'unione dei suoi emisferi chiusi D_\pm^k . Data una mappa $f : S^{k-1} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ abbiamo un fibrato vettoriale su S^k

$$E_f = \frac{D_+^k \times \mathbb{R}^n \amalg D_-^k \times \mathbb{R}^n}{(x, v) \in \partial D_-^k \times \mathbb{R}^n \sim (x, f(x)v) \in \partial D_+^k \times \mathbb{R}^n}$$

Questo si può vedere per esempio allargando gli emisferi a dischi aperti dove la funzione frizione dà le funzioni di assemblaggio in ogni punto.

Esempio (Il fibrato tangente a S^2). Consideriamo il campo v_+ sull'emisfero nord di S^2 dato dal trasporto parallelo di un vettore al polo nord lungo ciascun meridiano in modo da mantenere costante l'angolo col meridiano. Riflettendo rispetto al piano dell'equatore si ottiene un campo sul polo sud v_- e ruotando i campi di 90° si ottengono altri due campi indipendenti w_\pm .

I campi v_\pm e w_\pm banalizzano TS^2 su D_\pm così che abbiamo i nostri due mezzi fibrati. La funzione frizione necessaria a farli combaciare ruota in ogni punto i vettori (v_+, w_+) nei vettori v_-, w_- corrispondenti, ovvero è la rotazione di un angolo doppio della longitudine.

Esempio (Il fibrato tautologico su $\mathbb{C}P^1$). Identificando la linea proiettiva complessa con la sfera di Riemann S^2 possiamo esprimere ogni punto dell'emisfero nord (interno di S^1) come $[z, 1]$ e ogni punto dell'emisfero sud (esterno di S^1) come $[1, z^{-1}]$.

Questo ci dà le sezioni costanti

$$[z, 1] \mapsto (z, 1) \text{ su } D_0 \tag{5.3.1}$$

$$[1, z^{-1}] \mapsto (1, z^{-1}) \text{ su } D_\infty \tag{5.3.2}$$

che danno banalizzazioni del fibrato sui singoli emisferi.

Dato che per passare dall'emisfero sud all'emisfero nord basta moltiplicare per z , la funzione frizione è $f(z) = z$. (Se avessimo invertito gli emisferi, sarebbe stata $f(z) = z^{-1}$)

Nota. Funzioni frizione omotope danno fibrati isomorfi. Infatti un omotopia $S^{k-1} \times I \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ fa da funzione frizione per un fibrato vettoriale $E_F \rightarrow S^k \times I$ che restringe ai due fibrati agli estremi, che sono isomorfi per la proposizione precedenti.

Proposizione 5.9. C'è una corrispondenza biunivoca

$$[S^{k-1}, \text{GL}_n(\mathbb{C})] \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{C}}^n(S^k) \quad (5.3.3)$$

$$f \mapsto E_f. \quad (5.3.4)$$

Dimostrazione. Costruiamo un'inversa.

Dato un fibrato su S^k le sue restrizioni agli emisferi sono banali perché questi sono contraibili. Siano h_{\pm} le banalizzazioni globali. Allora $h_+h_-^{-1}$ dà una mappa $S^{k-1} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

La sua classe di omotopia è ben definita perché le diverse possibili scelte di h_{\pm} differiscono di una mappa $D_{\pm}^k \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ che è omotopa a una mappa costante essendo gli emisferi contraibili.

Lemmino: $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ è connesso per archi perché ogni matrice può essere diagonalizzata lungo un cammino in $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ con mosse di Gauss gradualmente, e l'insieme delle matrici diagonali è connesso per archi essendo il prodotto di n copie di $\mathbb{C} - \{0\}$.

Le h_{\pm} sono pertanto uniche salvo omotopia, e pertanto lo è anche la funzione frizione che inducono. \square

Esempio. Ogni fibrato vettoriale complesso su S^1 è banale dato che $[S^0, \text{GL}_n(\mathbb{C})]$ ha un solo elemento.

Esempio. Il fibrato tautologico $H \rightarrow \mathbb{C}P^1$ soddisfa $H^2 + 1 = 2H$, infatti basta confrontare le due funzioni frizione

$$\left[z \mapsto \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \left[z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \right]$$

Più in generale $E_{fg} \oplus n \cong E_f \oplus E_g$.

Nota. Tutto questo non funziona con fibrati reali perché $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ ha due componenti disconnesse. Ciascuna è però connessa per archi per lo stesso ragionamento di $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, e la scelta di una di queste componenti corrisponde alla scelta di un'orientazione.

Definizione. Un'orientazione su un fibrato vettoriale reale è una funzione che assegna un'orientazione a ogni fibra in modo che banalizzi come \mathbb{R}^n con l'orientazione standard.

Un'orientazione è determinata da una n -pla ordinata di sezioni locali indipendenti.

Nota. Non tutti i fibrati vettoriali ammettono un'orientazione. Ogni fibrato di linea orientabile su base paracompatta è banalizzato dalla sezione dritta, quindi per esempio il fibrato di Möbius non è orientabile.

Proposizione 5.10. C'è una corrispondenza biunivoca $[S^{k-1}, \text{GL}_n^+(\mathbb{R})] \rightarrow \text{Vect}_+^n(S^k)$.

Nota. Sia $\text{Vect}_0^n(S^k)$ l'insieme dei fibrati vettoriali sulla sfera con l'orientazione specificata nella fibra su un punto x_0 dell'equatore, modulo isomorfismi che preservano l'orientazione di questa fibra.

Possiamo scegliere banalizzazioni h_{\pm} sugli emisferi che portino questa orientazione nell'orientazione standard di \mathbb{R}^n , che sono come prima uniche salvo omotopia, così che abbiamo una corrispondenza biunivoca tra $\text{Vect}_0^n(S^k)$ e classi di omotopia di equatori di matrici in cui x_0 ha determinante positivo.

Nota. La mappa $\text{Vect}_0^n(S^k) \rightarrow \text{Vect}^n(S^k)$ che dimentica l'orientazione in x_0 è suriettiva 2 : 1 tranne sui fibrati che hanno un automorfismo che inverte l'orientazione in x_0 , sui quali è anche iniettiva.

Esempio. Se $k = 1$ abbiamo solo due classi di omotopia, a seconda che la mappa mandi $\{-1\}$ in $\text{GL}_n^{\pm}(\mathbb{R})$.

I fibrati corrispondenti sono il fibrato banale e il fibrato di Möbius se $n = 1$, oppure la somma diretta del fibrato di Möbius con un fibrato banale se $n > 1$. Tutti questi fibrati hanno automorfismi che invertono l'orientazione delle fibre, e ciascun $\text{Vect}^n(S^1)$ ha due elementi, e il fibrato non banale tra questi non è mai orientabile.

Esempio. Se $k > 1$ l'equatore è connesso per archi, pertanto se a x_0 viene data una matrice positiva lo stesso vale per l'intero equatore.

Questo implica che la dimenticanza $\text{Vect}_+^n(S^k) \rightarrow \text{Vect}_0^n(S^k)$ è una corrispondenza biunivoca. Ogni fibrato vettoriale su S^k è perciò orientabile con due orientazioni possibili, determinate dall'orientazione di una singola fibra.

Nota. Gram-Schmidt fornisce una retrazione per deformazione di $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ su $\text{O}(n)$ e quindi di $\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ su $\text{SO}(n)$.

Nel caso complesso $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ viene retratto a $\text{U}(n)$.

Le classi di omotopia di equatori di GL pertanto sono esattamente le classi di omotopia di equatori di $\text{SO}(n)$ o $\text{U}(n)$, che sono decisamente più piccoli.

Esempio. Le classi di omotopia di mappe $S^1 \rightarrow \text{SO}(2) \cong S^1$ sono \mathbb{Z} , in quanto ogni tale mappa è omotopa a z^n .

Ogni z^n può usata come frizione per ingranare un fibrato E_n su S^2 , di cui sono esempi $E_1 = H$, $E_2 = TS^2$. Abbiamo perciò che $\text{Vect}_+^2(S^2) \cong \mathbb{Z}$. Se permettiamo agli isomorfismi di invertire l'orientazione, i possibili fibrati sono $\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Essendo anche $\text{U}(1) \cong S^1$, anche $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^2(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

Poiché tutte le mappe $S^{k-1} \rightarrow S^1$ sono omotope per $k > 2$, ogni fibrato vettoriale bidimensionale su $S^{k>2}$ è banale, così come ogni fibrato di linea complesso.

Esempio. Sta di fatto che tutte le mappe $S^2 \rightarrow \text{SO}(n)$ oppure $S^2 \rightarrow \text{U}(n)$ sono omotope, pertanto tutti i fibrati vettoriali su S^3 sono banali.

Nota. $\pi_i X$ è formato dalle classi di omotopia di mappe $S^i \rightarrow X$ come spazi puntati. Per spazi connessi per archi la struttura di gruppo è indipendente dalla scelta dei punti base.

I gruppi $[S^i, \text{SO}(n)]$ e $[S^i, \text{U}(n)]$ sono isomorfi a $\pi_i \text{SO}(n)$ e $\pi_i \text{U}(n)$.

La dimenticanza $\pi_i \text{SO}(n) \rightarrow [S^i, \text{SO}(n)]$ è suriettiva perché ogni mappa che non connette i due punti base (s_0 e Id) è omotopa a una che lo mette al posto giusto. È anche iniettiva perché ogni omotopia tra mappe buone che passa da mappe non buone può essere divisa per ogni tempo per la matrice $f_t(s_0)$ e resa un'omotopia buona per tutti i tempi.

Gli stessi argomenti si applicano a $\text{U}(n)$.

5.4 Il fibrato universale

Definizione. Per dare una topologia alla grassmanniana in un modo diverso, passiamo dalla stiefeliana, l'insieme delle basi ortonormali di n elementi in \mathbb{R}^k , che è un sottospazio chiuso del prodotto di n copie di S^{k-1} , che è compatto, quindi è compatta. Diamo alla grassmanniana la topologia quoziente data dall'associazione di una base all' sottospazio che genera. In questo modo anche $G_n(\mathbb{R}^k)$ è compatto.

Definizione. Diamo a $G_n(\mathbb{R}^\infty) = \bigcup_k G_n(\mathbb{R}^k)$ la topologia debole per cui un sottoinsieme è aperto se interseca ogni $G_n(\mathbb{R}^k)$ in un aperto.

Lemma 5.2. $E_n(\mathbb{R}^k) = \{(V, v) \in G_n(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k \mid v \in V\} \rightarrow G_n(\mathbb{R}^k)$ è un fibrato vettoriale per k finito e infinito.

Dimostrazione. Cominciamo dal caso finito.

Per ogni punto $V \in G_n(\mathbb{R}^k)$ consideriamo la proiezione ortogonale $\pi_V : \mathbb{R}^k \rightarrow V$ e sia U_V l'insieme dei sottospazi $V' \in G_n(\mathbb{R}^k)$ che mantengono la loro dimensione dopo essere proiettati.

Mostriamo che ogni U_V è aperto, cioè che la sua preimmagine nella stiefeliana è aperta. Questa preimmagine consiste delle basi ortonormali che rimangono vettori indipendenti dopo la proiezione. Questa condizione equivale a richiedere che il determinante della matrice associata sia non nullo, che è una condizione aperta.

Mostriamo che

$$h : p^{-1}(U_V) \rightarrow U_V \times V \cong U_V \times \mathbb{R}^n \quad h(V', v) = (V', \pi_V(v)) \quad (5.4.1)$$

è una banalizzazione locale. È chiaro che h è biunivoca e isomorfismo lineare nelle fibre, ma dobbiamo mostrare che h e h^{-1} sono continue.

Per ogni V' c'è una mappa lineare $L_{V'}$ tale che $L_{V'}|_{V'} = \pi_V$ e $L_{V'}|_{V^\perp} = Id$. La si può scrivere come AB^{-1} dove B è il cambio di base dalla base canonica all'unione di una base ortonormale di V' e di una fissata di V^\perp , e A proietta soltanto gli elementi associati a V' . Ma sia A che B dipendono continuamente dai vettori della base di V' , e quindi $L_{V'}$ è continuo e passa attraverso il quoziente a una mappa che dipende in modo continuo da V' . Ma

$$h(V', v) = (V', \pi_V(v)) = (V', L_{V'}(v))$$

pertanto sia h che h^{-1} sono continue.

Nel caso infinito si prende $U_V = \bigcup_k U_V^k$. Le banalizzazioni locali danno una banalizzazione locale sull'unione, che è automaticamente continua dato che usiamo la topologia debole. \square

Teorema 5.2. Per X paracompatto $[X, G_n] \cong \text{Vect}^n(X)$ mediante $[f] \mapsto f^*E_n$.

Per questo $G_n = G_n(\mathbb{R}^\infty)$ si dice spazio classificatore dei fibrati vettoriali n -dimensionali e $E_n = E_n(\mathbb{R}^\infty)$ si dice fibrato universale.

Esempio. Il fibrato cotangente alla sfera può essere ottenuto associando a ogni punto della sfera il suo sottospazio ortogonale in \mathbb{R}^{n+1} .

Dimostrazione. Un isomorfismo tra un fibrato su X e un pullback del fibrato universale è catturato dalla mappa indotta $g : E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ lineare e iniettiva su ciascuna fibra. Infatti data una tale mappa g possiamo definire una mappa $f : X \rightarrow G_n$ che associa ad un punto x l' n -piano $g(p^{-1}(x))$.

Per mostrare la suriettività della mappa $[X, G_n] \rightarrow \text{Vect}^n(X)$ prendiamo un $p : E \rightarrow X$. Dato un ricoprimento aperto numerabile di X tale che E è banale su ciascuna pezza, e una partizione dell'unità subordinata con lo stesso indice, componiamo le banalizzazioni con la proiezione su \mathbb{R}^n e moltiplichiamo per una φ_i per ottenere una mappa $E \rightarrow \mathbb{R}^n$ nulla al di fuori di $p^{-1}(U_i)$. Nell'intorno di ciascun punto di x c'è solo un numero finito di queste funzioni non nulle, perciò le posso usare come coordinate di una mappa $E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ iniettiva su ciascuna fibra.

Per l'iniettività, in presenza di funzioni che danno pullback isomorfi mostriamo che le funzioni $E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ che inducono sono omotope e che tutte le funzioni intermedie dell'omotopia sono lineari e iniettive sulle fibre. Questa omotopia si può trasportare alle funzioni di partenza: $f_t = g_t(p^{-1}(x))$.

Definiamo l'omotopia iniettiva su \mathbb{R}^∞

$$D_t(x_1, x_2, \dots) = (1-t)(x_1, x_2, \dots) + t(x_1, 0, x_2, 0, \dots)$$

e l'analogo P_t per gli indici pari. Allora

$$(1-t)D_t \circ g_0 + tP_t \circ g_1$$

è un'omotopia tra g_0 e g_1 . □

Nota. Questo teorema permette di tradurre affermazioni generali al caso speciale del fibrato universale. Per esempio diventa ovvio che i fibrati vettoriali su base paracompatta ammettono prodotti interni, in quanto E_n ammette il prodotto interno canonico su ciascun sottospazio, che induce un prodotto interno su ogni suo pullback.

Nota. Il teorema si traduce perfettamente al caso complesso e nel caso reale orientato.

Nota. $G_n^+ = G_n^+(\mathbb{R}^\infty)$, la grassmanniana dei sottospazi orientati, è il rivestimento universale (2:1) di G_n . Entrambi infatti sono connessi per archi dato che $\text{Vect}_{(+)(x)}^n$ ha un singolo punto, e G_n^+ è semplicemente connesso a causa della banalità di $\text{Vect}_+^n(S^1)$.

Un fibrato è orientabile se e solo se la mappa che lo classifica $X \rightarrow G_n$ induce una mappa $X \rightarrow G_n^+$.

6 Gruppi di Lie

6.1 Gruppi, sottogruppi, esponenziale

Definizione. Un gruppo di Lie è una varietà liscia che è anche un gruppo con moltiplicazione e inversioni che sono mappe lisce.

Esercizio 6.1. Le traslazioni $\ell_a(x) = ax$ sono diffeomorfismi.

Definizione. Un'omomorfismo di gruppi di Lie è un omomorfismo liscio.

Esempio. $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie.

Esempio. $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie perché la restrizione a una sottovarietà regolare della varietà di arrivo di una mappa liscia è liscia.

Allo stesso modo $\text{SL}(n, \mathbb{C})$.

Esempio. Il gruppo ortogonale, già fatto per fortuna.

Definizione. Un sottogruppo di Lie di un gruppo di Lie è un sottogruppo che è una sottovarietà (livello 2) e le sue operazioni sono lisce

Nota. L'ultima richiesta è necessaria perché non abbiamo richiesto che il sottogruppo fosse una sottovarietà regolare (livello 3).

Esempio. I nodi sul toro, già fatti per fortuna.

Esercizio 6.2. Confronta la topologia indotta sul nodo irrazionale intorno al toro dalla corrispondenza con una retta con la topologia quoziente.

Proposizione 6.1. Un sottogruppo che è una varietà regolare è un sottogruppo di Lie, in questo caso detto anche sottogruppo di Lie incorporato.

Esempio. SL e O sono sottogruppi di Lie incorporati.

Teorema 6.1. Un sottogruppo chiuso di un gruppo di Lie è un sottogruppo di Lie incorporato.

Esempio. I nodi irrazionali nel toro non sono chiusi.

Esempio. SL e O sono chiusi perché zeri di polinomi.

Definizione. L'esponenziale di una matrice si definisce per serie di potenze.

Proposizione 6.2. $Mat(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ con la norma di Frobenius è un'algebra di pre-Banach, cioè vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.

Dimostrazione. Elemento per elemento:

$$(XY)_{ij}^2 = \left(\sum_k x_{ik} y_{kj} \right)^2 \leq \left(\sum_k x_{ik}^2 \right) + \left(\sum_k y_{kj}^2 \right) = a_i b_j$$

dove $a_i = \sum_k x_{ik}^2$ e $b_j = \sum_k y_{kj}^2$. Abbiamo allora

$$\|XY\|^2 = \sum_{i,j} (XY)_{ij}^2 \leq \sum_{i,j} a_i b_j = \left(\sum_i a_i \right) \left(\sum_j b_j \right) = \|X\|^2 \|Y\|^2$$

□

Proposizione 6.3. In un algebra di pre-Banach la moltiplicazione per scalare di punti o successioni è continua.

Nota. \mathbb{R}^{n^2} è in realtà di Banach, quindi Mat è un'algebra di Banach, pertanto l'esponenziale di una matrice è ben definito in quanto la serie converge assolutamente per qualsiasi matrice.

Esercizio 6.3. Se $[A, B] = 0$ allora $e^{A+B} = e^A e^B$.

Proposizione 6.4. $\frac{d}{dt} e^{tX} = X e^{tX} = e^{tX} X$

Dimostrazione. Scrivi la serie per ogni elemento e differenzia. □

Nota. Tutto funziona anche nel caso complesso usando la norma hermitiana.

Proposizione 6.5. $\det e^X = e^{\text{tr} X}$

Dimostrazione. Portiamo una matrice in forma triangolare superiore, il che lascia invariati tr e \det , e usiamo il fatto che la diagonale di una potenza di una matrice triangolare superiore è la potenza della diagonale, così che questo si applica anche all'esponenziale. \square

Corollario 6.1. e^X non è mai singolare perché il suo determinante non è mai nullo.

Esempio. $c(t) = Ae^{tX}$ è la classica curva che parte da A con velocità X .

Proposizione 6.6. $d \det_I(X) = \text{tr}(X)$

Dimostrazione. Usiamo una curva che parte da I con velocità X :

$$d \det_I(X) = \text{tr}_I \left. \frac{d}{dt} \det(e^{tX}) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} e^{t \text{tr} X} \right|_{t=0} = (\text{tr} X) e^{t \text{tr} X} \Big|_{t=0} = \text{tr} X$$

\square

Esercizio 6.4. Se s_m è la somma parziale di e^X allora

$$\left\| s_\ell - s_m \leq \sum_{m+1}^{\ell} \frac{\|X\|^k}{k!} \right\|$$

quindi s_m è di Cauchy.

Esercizio 6.5. La regola di Leibniz vale per le matrici.

Esercizio 6.6. La componente connessa dell'identità di un gruppo di Lie:

- è chiusa rispetto a moltiplicazione e inversione.
- è aperta
- è un gruppo di Lie a sua volta

Esercizio 6.7. Ogni sottogruppo aperto di un gruppo di Lie connesso è automaticamente uguale all'intero gruppo.

Esercizio 6.8. Il differenziale della moltiplicazione $\mu : G \times G \rightarrow G$ è

$$d\mu_{a,b}(X_a, X_b) = dr_b(X_a) + d\ell_a(Y_b)$$

Esercizio 6.9. Il differenziale dell'inversione $\iota : G \rightarrow G$ è

$$d\iota_a(Y_a) = -dr_{a^{-1}}d\ell_{a^{-1}}Y_a$$

Esercizio 6.10. $d \det_A(AX) = (\det A) \text{tr} X$

Esercizio 6.11. 1 è un valore regolare del determinante, il che mostra velocemente che SL è una sottovarietà regolare di GL .

Esercizio 6.12. Dato $r \in \mathbb{R}^\times$ l'assegnazione $M_r = \text{diag}(r, 1, \dots, 1)$ induce il diffeomorfismo

$$\text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^\times \quad (6.1.1)$$

$$A \mapsto (AM_{1/\det A}, \det A) \quad (6.1.2)$$

$\text{GL}(2)$ e $\text{SL}(2) \times \mathbb{R}$ non sono isomorfi come gruppi perché hanno centri diversi, mentre $\text{GL}(3) \cong \text{SL}(3) \times \mathbb{R}$ con l'isomorfismo

$$A \mapsto ((\det A)^{1/3}A, \det A)$$

Questo si generalizza a tutte le dimensioni pari e dispari.

Esercizio 6.13. O è chiuso e limitato in Mat e pertanto compatto.

Esercizio 6.14. $\text{SO}(2) \cong S^1$.

Esercizio 6.15. Il gruppo unitario $U(n)$ è una sottovarietà regolare di $GL(n, \mathbb{C})$.

Esercizio 6.16. Ogni matrice di $SU(2)$ ha la forma

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$$

con $|a|^2 + |b|^2 = 1$, pertanto è $S^3 \in \mathbb{C}^2$.

Esercizio 6.17. Calcola

$$e \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

coglione.

Esercizio 6.18. Il gruppo simplettico è

$$\text{Sp}(n) = \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{H}) \mid \bar{A}^T A = I\}$$

dove \bar{A} è il coniugato quaternionico.

È una sottovarietà regolare di $\text{GL}(n, \mathbb{H})$.

Esercizio 6.19. Data J la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

il gruppo simplettico complesso la fissa:

$$\text{Sp}(2n, \mathbb{C}) = \{A \in \text{GL}(2n, \mathbb{C}) \mid A^T J A = J\}$$

È una sottovarietà regolare di $\text{GL}(2n, \mathbb{C})$.

6.2 Algebre e campi invarianti

Nota. I differenziali delle traslazioni, per esempio sinistre, collegano gli spazi tangenti ai vari punti di un gruppo di Lie:

$$d\ell_g : T_e G \rightarrow T_g G$$

Esercizio 6.20. L'algebra di GL è Mat perché GL è denso credo boh.

Esercizio 6.21. L'algebra di SL sono le matrici a traccia nulla, perché se $c(0) = I$ e $\dot{c}(0) = X$ ha determinante unitario la sua velocità ha traccia nulla.

$$\left. \frac{d}{dt} \det(c(t)) \right|_{t=0} = d(\det \circ c) \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) \quad (6.2.1)$$

$$= d \det_I \left(\left. dc \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) \quad (6.2.2)$$

$$= d \det_I(\dot{c}(0)) \quad (6.2.3)$$

$$= d \det_I(X) \quad (6.2.4)$$

$$= \text{tr } X \quad (6.2.5)$$

$$(6.2.6)$$

Esercizio 6.22. L'algebra di O l'abbiamo calcolata quando abbiamo dimostrato che è un gruppo, sono le matrici antisimmetriche.

Definizione. Un campo è invariante a sinistra se $d\ell_g = X$ cioè $(d\ell_g)_h(X_h) = X_{gh}$.

Nota. Un campo invariante a sinistra è completamente determinato dal suo valore nell'identità:

$$X_g = (d\ell_g)_e(X_e)$$

e ogni vettore tangente all'identità può essere spinto in avanti ad un campo invariante a sinistra:

$$\tilde{A}_g = d\ell_g A \quad (6.2.7)$$

$$(d\ell_g)_e(\tilde{A}_h) = (d\ell_g)_h(d\ell_h)_e A \quad (6.2.8)$$

$$= d(\ell_{gh})_e A \quad (6.2.9)$$

$$= \tilde{A}_{gh} \quad (6.2.10)$$

La corrispondenza è un isomorfismo lineare.

Esercizio 6.23. $\frac{d}{dx}$ è l'unico campo invariante a sinistra sul gruppo additivo \mathbb{R} salvo multipli.

Esercizio 6.24. Se B è una matrice tangente a GL nell'identità il suo pushforward in g è gB .

Proposizione 6.7. Ogni campo invariante a sinistra su un gruppo di Lie è C^∞ .

Dimostrazione. Mostriamo che X è una derivazione in ogni punto. Lo rappresentiamo con una curva gc dove c è una curva che parte dall'identità con velocità X_e .

$$(Xf)(g) = X_g f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(gc(t))$$

che è la derivata di composizione di funzioni C^∞ . □

Proposizione 6.8. Il commutatore preserva l'invarianza per traslazioni.

Dimostrazione. Un campo invariante a sinistra è ℓ_g -correlato a sé stesso per ogni g . \square

Proposizione 6.9. La parentesi di Lie di due matrici nell'algebra di GL è il commutatore di matrici.

Dimostrazione. Stiamo dicendo che

$$c_{ij} = A\tilde{B}x_{ij} - B\tilde{A}x_{ij}$$

Sappiamo che

$$\tilde{B}_g x_{ij} = (gB)_{ij} = \sum_k g_{ik} b_{kj} = \sum_k b_{kj} x_{ik}(g)$$

così che

$$A\tilde{B}x_{ij} = \sum_{p,q} a_{pq} \frac{\partial}{\partial x_{pq}} \Big|_I \left(\sum_k b_{kj} x_{ik} \right) = \sum_k a_{ik} b_{kj} = (AB)_{ij}$$

\square

Definizione. Dato un omomorfismo di gruppi di Lie $F : H \rightarrow G$ il pushforward indotto è

$$F_*(\tilde{A}) = (dF_e A)^\sim$$

Proposizione 6.10. X è F -correlato a F_*X .

Dimostrazione. Dobbiamo far vedere che

$$dF_h(X_h) = (F_*X)_{F(h)}$$

Il lato sinistro è

$$dF_h(X_h) = dF_h(d\ell_h)_e(X_e) = d(F \circ \ell_h)_e(X_e)$$

mentre il lato destro è

$$(F_*X)_{F(h)} = (dF_e(X_e))^\sim_{F(h)} = d\ell_{F(h)} dF_e(X_e) = d(\ell_{F(h)} \circ F)_e(X_e)$$

ma essendo F un omomorfismo di gruppi di Lie abbiamo

$$F \circ \ell_h = \ell_{F(h)} \circ F$$

\square

Proposizione 6.11. Il differenziale di un omomorfismo di gruppi di Lie è un morfismo di algebre di Lie.

Dimostrazione. Quella roba lì sulle parentesi correlate. \square

Corollario 6.2. La parentesi di Lie sull'algebra di un sottogruppo di Lie è la restrizione alla sua algebra della parentesi ambiente.

Teorema 6.2. C'è corrispondenza biunivoca tra sottogruppi di Lie connessi di un gruppo di Lie e sottoalgebre di Lie della sua algebra.

Nota. L'algebra di T^2 è \mathbb{R}^2 e le sue sottoalgebre sono le rette che passano per l'origine, ciascuna delle quali individua quindi un sottogruppo di Lie del toro. Se avessimo richiesto che un sottogruppo di Lie fosse una sottovarietà regolare, avremmo rotto la corrispondenza, in quanto le rette di pendenza irrazionale espongono a nodi densi del toro.

Esercizio 6.25. \mathfrak{u} è formata dalle matrici antihermitiane.

Esercizio 6.26. \mathfrak{sp} è formata dalle matrici quaterno-antihermitiane.

Esercizio 6.27. $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ è formata dalle matrici per cui JX è simmetrica.

Esercizio 6.28. Trovare i campi invarianti a sinistra su \mathbb{R}^n .

Esercizio 6.29. Trovare i campi invarianti a sinistra su S^1 .

Esercizio 6.30. La curva integrale del campo invariante a sinistra generato da $A \in \mathfrak{gl}$ è $c(t) = e^{tA}$. Trovare la curva integrale che parte da $g \in GL$.

Esercizio 6.31. Ogni gruppo di Lie è parallelizzabile.

Esercizio 6.32. La rappresentazione aggiunta di un gruppo di Lie associa ad un elemento il differenziale del coniugio mediante esso. È una mappa liscia.

Esercizio 6.33. $\mathfrak{o}(3) \cong (\mathbb{R}^3, \times)$.