Appunti di Cacciatori

danivolo

Indice

1 Preliminari

Proposizione 1.1 (Identità del parallelogramma)**.** $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$

Proposizione 1.2. *$\ell_2(\mathbb{C})$ è uno spazio di Hilbert.*

Dimostrazione. Lo spazio è ovviamente chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalare, e rispetto alla somma grazie alla disuguaglianza triangolare.

Si verifica che il prodotto scalare è ben definito usando che $xy < \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

Per mostrare che lo spazio è completo prendiamo una successione di Cauchy di successioni $\{x_n\}_m$. Il fatto che sia di Cauchy significa che $\|x_a - x_b\|^2 = \sum_n |x_{a,n} - x_{b,n}|^2 < \infty$, ma dato che ogni termine deve tendere a zero separatamente otteniamo nuove successioni di Cauchy ruotate di 90°: $x_{m,n}$ fissando n.

Queste sono successioni in $\mathbb{C}$ e convergono, e prendendo tutti i limiti possiamo fare una bozza di limite della successione di partenza, $x_n = \lim_m x_{m,n}$. Per dimostrare che questo limite sta in ℓ_2 interpoliamo la disuguaglianza triangolare:

$$\sum_n |x_n|^2 \leq \sum_n |x_n - x_{m,n}|^2 + \sum_n |x_{m,n}|^2$$

Il secondo termine tende a 0 perché le successioni iniziali sono di Cauchy. Il terzo termine è finito perché è la norma di una successione ℓ_2. Perciò la norma del limite è finita.

Ora che lo sappiamo, il fatto che il secondo termine tenda a 0 mostra che la successione converge effettivamente nella norma di ℓ_2. □

Definizione. *Un algebra di insiemi è una collezione di sottoinsiemi di X che*

1. *Contiene X (spoiler: anche $\varnothing$)*

2. *È chiusa rispetto al complemento*

3. *È chiusa rispetto all'unione finita (spoiler: anche rispetto all'intersezione finita)*

Definizione. *Una misura elementare è una funzione dall'algebra in $\bar{\mathbb{R}}$ positiva, subadditiva e tale che $m(\varnothing) = 0$*

Esempio. *La misura del conteggio conta il numero di elementi sull'algebra dei finiti-cofiniti di $\mathbb{N}$.*

Esempio. *La misura di Dirac ti dice se il tuo volume contiene la particella o no.*

Definizione. *Un quadrabile è un insieme ugualmente approssimabile da rettangoli da dentro e da fuori, e il volume è quello di queste approssimazioni.*

Proposizione 1.3. *I quadrabili formano un'algebra e il volume è una misura elementare.*

Definizione. *Una σ-algebra è un'algebra chiusa rispetto all'unione numerabile.*

Definizione. *Una misura è una misura elementare su una σ-algebra numerabilmente additiva.*

Definizione. *Una σ-algebra è compatibile con una topologia se la contiene.*

2 3 marzo

3 8 marzo

Definizione. *Un plurirettangolo è definito da*

$$[a, b] = \prod_j [a_j, b_j]$$

Definizione. *L'algebra di Borel è l'algebra generata da collezioni al più numerabili di rettangoli.*

Teorema 3.1. *L'algebra di Borel è una σ-algebra.*

Teorema 3.2. *L'algebra di Borel è compatibile con la topologia metrica.*

Dimostrazione. Dato un'aperto, è possibile ricoprirlo con cubetti di centro numerabile e raggio piccolo abbastanza da starci dentro. □

Definizione. *La misura di Borel si un insieme è l'estremo inferiore del volume di un ricoprimento numerabile di rettangoli.*

Teorema 3.3. *La misura di Borel è una misura.*

Definizione. *Un'insieme è trascurabile se è contenuto in un insieme di misura nulla.*

Definizione. *Una misura è completa se tutti i trascurabili sono misurabili.*

Proposizione 3.1. *Si può completare una misura aggiungendo tutte le unioni di un misurabile e un trascurabile possibili, e assegnando loro misura uguale a quella del misurabile.*

Definizione. *La misura di Lebesgue è il completamento della misura di Borel.*

Esempio. *Un intervallo aperto si può ottenere per esempio come*

$$(c, d) = \bigcup_j \left[c + \frac{1}{j}, d - \frac{1}{j}\right]$$

4 9 marzo

Definizione. *Se la misura μ è completa, diciamo che f è misurabile se ogni intorno di $+\infty$ ha preimmagine misurabile.*

Proposizione 4.1. *Nella definizione posso usare intorni aperti, semiaperti o chiusi di ogni punto in $\overline{\mathbb{R}}$.*

Definizione. *Una funzione (d'ora in poi in $\overline{\mathbb{R}}$) si dice semplice se è misurabile e assume un numero finito di valori non negativi.*

Esempio. *La funzione caratteristica di un insieme è semplice se l'insieme è misurabile.*

Proposizione 4.2. *Ogni funzione semplice è combinazione lineare finita positiva di funzioni caratteristiche di misurabili disgiunti.*

Definizione. *L'integrale di una funzione semplice così scritta è la somma delle misure degli insiemi pesate coi coefficienti.*

Definizione. *L'integrale di una funzione positiva misurabile f è l'estremo superiore degli integrali di funzioni semplici minori o uguali a f. Una f così è sempre integrabile. Se l'integrale esiste finito diciamo che f è sommabile.*

Esercizio 4.1. *Le parti positive e negative di una funzione misurabile sono misurabili, ma non vale il contrario.*

Definizione. *Una funzione misurabile si dice integrabile se almeno una tra la sua parte positiva e la sua parte negativa è sommabile, e definiamo il suo integrale come la differenza di questi integrali.*

Definizione. *L'integrale di una funzione a valori complessi è f è $\int_X \operatorname{Re} f(x) d\mu(x) + i \int_X \operatorname{Im} f(x) d\mu(x)$*

Definizione. *Una funzione misurabile $f : X \to \mathbb{C}$ si dice integrabile (sommabile) su A misurabile se $\chi_A f$ è integrabile (sommabile).*

Esercizio 4.2. *Le funzioni misurabili e le funzioni sommabili formano uno spazio vettoriale, ma le funzioni integrabili no.*

5 10 marzo

Esempio. *Se prendiamo* $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \#)$ *tutte le funzioni sono misurabili, e l'integrale è la serie associata a una successione, e* f *è sommabile se e solo se lo è* $|f|$*.* $(-1)^n/n$ *non è sommabile secondo questa misura.*

Proposizione 5.1. *Ogni funzione integrabile secondo Riemann su un quadrabile è ivi sommabile secondo Lebesgue.*

Proposizione 5.2. *Due funzioni integrabili uguali quasi ovunque hanno uguale integrale.*

Proposizione 5.3. *Se sia* f *che* $|f|$ *sono integrabili secondo Riemann in senso generalizzato allora* f *è integrabile secondo Lebesgue.*

Esercizio 5.1. *Se* $A_n \subseteq A_{n+1}$ *è una successione di misurabili allora* $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x)d\mu(x) = \int_{\cup_{n=1}^{\infty} A_n} f(x)d\mu(x)$

Esempio. $\sin(x)/x$ *è integrabile secondo Riemann ma non secondo Lebesgue.*

Definizione. *Su un prodotto di spazi si può definire una misura prodotto data dal prodotto delle misure sull'algebra generata dai prodotti di misurabili.*

Teorema 5.1 (Fubini)**.** *Sia* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *misurabile e integrabile (sommabile) secondo la misura prodotto. Se la funzione è integrabile (sommabile) in* x*, questo integrale è integrabile (sommabile) in* y *per quasi tutti i valori di* x*. L'integrale in due step è uguale all'integrale totale.*

Teorema 5.2 (Beppo-Levi)**.** *Il limite di una successione monotona di funzioni misurabili è integrabile e posso scambiare limite e integrale.*

Teorema 5.3 (Convergenza dominata)**.** *Il limite di una successione di funzioni sommabili maggiorata da una funzione sommabile è sommabile e posso scambiare limite e integrale.*

6 15 marzo

Lemma 6.1. $(x+y)^p \leq 2^p(x^p+y^p)$ *per* $x, y \geq 0, p \geq 1$

Dimostrazione. $(x+y)^p \leq \max\{x,y\}^p \leq 2^p \max\{x^p, y^p\}$ □

Proposizione 6.1 (Young)**.** $xy \leq x^p/p + y^q/q$ *per* $x, y \geq 0, 1/p + 1/q = 1$

Dimostrazione. Si usa la convessità del logaritmo con $x_1 = x^p,\ x_2 = y^q,\ a = 1/p,\ 1-a = 1/q$ □

Lemma 6.2. *Una funzione misurabile positiva con integrale nullo è nulla quasi ovunque.*

Dimostrazione. L'insieme dei punti in cui la funzione vale meno di $1/N$ è misurabile perché f è misurabile, e per definizione $f > A_N/N$, così che $\mu(A_n) < N \int f d\mu \to 0$. □

Proposizione 6.2 (Hölder). $\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq (\int_X |f(x)|^p d\mu(x))^{1/p} (\int_X |g(x)|^q d\mu(x))^{1/q}$

Dimostrazione. Se f o g sono nulle quasi ovunque l'uguglianza vale. Altrimenti si integra la disuguaglianza di Young con $x = |f| / \|f\|_p$, $y = |g| / \|g\|_q$. □

Esercizio 6.1. *Le precedenti disuguaglianze valgono con* $p = 1, q = \infty$

Proposizione 6.3 (Minkowski). $\int_X |f(x)g(x)|^p d\mu(x) \leq (\int_X |f(x)|^p d\mu(x))^{1/p} + (\int_X |g(x)|^p d\mu(x))^{1/p}$

Dimostrazione. Si scompone porta fuori dal termine a sinistra un fattore $|f+g|$, si maggiora il modulo dividendo gli integrali e si usa la disuguaglianza di Young in ciascun addendo con $q = p/(p-1)$. □

Teorema 6.1. $\mathcal{L}_p$ *è una varietà lineare.*

Dimostrazione. Corollario della disuguaglianza di Minkowski. □

Esercizio 6.2. *Se* $\|f\|_p = 0$ *e* f *è continua allora* $f = 0$ *ovunque.*

Teorema 6.2. L_p *è pre-Banach.*

Dimostrazione. La norma è una norma proprio perché abbiamo preso le classi di equivalenza. □

Lemma 6.3. *Il limite di una successione di Cauchy è lo stesso di una sua qualsiasi sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Posso avvicinare a piacimento la sottosuccessione al suo limite, e dato che è di Cauchy, anche la successione alla sottosuccessione, ma per la disuguaglianza triangolare ho avvicinato la successione al limite della sottosuccessione. □

Proposizione 6.4. *Uno spazio metrico è completo se e solo se ogni serie assolutamente convergente converge.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Una serie assolutamente convergente è di Cauchy (disuguaglianza triangolare), pertanto se lo spazio è completo converge.

($\Longleftarrow$) Prendiamo una successione di Cauchy. Consideriamo gli indici n_N per cui $\|Y_{n_N} - Y_{n_{N+1}}\| \leq 1/2^N$. La successione degli scarti converge assolutamente perché è maggiorata da $\|Y_{n_1}\| + \sum_k 1/2^k$. Quindi converge. Ma nella successione delle somme parziali degli scarti si cancella tutto tranne Y_{n_k}, ed ecco una sottosuccessione convergente, che la fa convergere. □

7 16 marzo

Teorema 7.1. *$\forall p \geq 1$ $L_p(X, \sigma_x, \mu)$ è uno spazio di Banach. Se $p = 2$ è uno spazio di Hilbert.*

Dimostrazione. Consideriamo una successione assolutamente convergente f_n. La serie dei moduli è monotona, e ogni somma parziale F_n è p-sommabile. Per Beppo-Levi l'integrale del limite F esiste ed è uguale al limite dell'integrale, che esiste finito.

Puntualmente, le somme parziali della successione di partenza ammettono limite, forse infinito, ma su insiemi di misura nulla dato che la serie dei moduli è sommabile. Stiamo lavorando coi rappresentanti quindi possiamo mettere a 0 il limite sugli insiemi sui quali è infinito. La successione G_n delle somme parziali di f_n converge puntualmente a questo nuovo limite G perché converge puntualmente assolutamente e $\mathbb{C}$ è completo.

Converge anche in norma:

$$\|G - G_n\|_p = \int (G - G_n)^p \tag{7.0.1}$$

$$\leq \int (|G| + |G_n|)^p \tag{7.0.2}$$

$$\leq \int (|G| + F_n)^p \tag{7.0.3}$$

$$\leq \int (|G| + F)^p \tag{7.0.4}$$

$$\leq 2^p \int F^p \leq \infty \tag{7.0.5}$$

Grazie a questo il $\lim_n \|G - G_n\| = \int \lim_n (G - G_n)$ ma sono funzioni che differiscono su sottoinsiemi di misura nulla, quindi l'integrale è nullo. □

Teorema 7.2. *In generale L_p è di Banach (di Hilbert se $p = 2$) se lo spazio ha misurabili di misura finita e non nulla che non si intersecano quasi mai.*

Dimostrazione. $f, g = \chi_{A,B}/\mu(A, B)^{1/p}$ violano la regola del parallelogramma. □

8 16 marzo: Il Ritorno

Proposizione 8.1. *$V \subset \mathcal{H}$ è completo se e solo se è chiuso.*

Dimostrazione. Ogni successione di Cauchy in $\mathcal{V}$ ammette limite in $\mathcal{H}$ perché $\mathcal{H}$ è completo, e questo limite è punto di accumulazione di $\mathcal{V}$, quindi sta in $\mathcal{V}$ se e solo se $\mathcal{V}$ è chiuso. □

Esempio. *L'insieme delle successioni finite in ℓ_2 non è chiuso perché la successione dei troncamenti parziali di $1/n$ non ha ivi limite.*

Definizione. *Un sottospazio di uno spazio di Hilbert (Banach) si dice sottospazio di Hilbert (Banach) se è chiuso.*

Proposizione 8.2. *Ogni sottospazio ortogonale è sottospazio di Hilbert.*

Dimostrazione. Continuità del prodotto scalare. □

Esercizio 8.1. *Sia* $V < \mathcal{H}$*. Allora* $(V^{\perp})^{\perp} = \overline{V}$

Teorema 8.1 (della proiezione)**.** *Sia* $A \subset \mathcal{H}$*. Definiamo* $d(x, A) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in A\}$
Sia $V < \mathcal{H}$*,* $x \in \mathcal{H}$*. Allora*

1. $\exists! x_0 \in V$ *t.c.* $\|x - x_0\| = d(x, V)$

2. $x - x_0 \in V^{\perp}$

3. $\|x_0\| \leq \|x\|$*, con l'uguaglianza se e solo se* $x = x_0$

Dimostrazione.

1. Prendiamo una successione di punti in V che distano da x al massimo $d + 1/n$. Interpolando nella distanza fra due termini x e usando la regola del parallelogramma si trova che la successione è di Cauchy in A chiuso, quindi ha limite x_0.

2. Confronto esplicito di $\|(x - x_0 - \alpha y)\|^2$ e $\|x - (x_{0+\alpha y})\|^2$ con $\alpha = (x - x_0|y)/\|y\|^2$
   Questo dimostra anche che x_0 è unico.

3. Teorema di Pitagora.

□

Esercizio 8.2. *Sia* $V < \mathcal{H}$*. Allora* $\mathcal{H} = V \bigoplus V^{\perp}$

9 17 marzo

Proposizione 9.1. *Se* $\mathcal{H}$ *è separabile, tutti gli insiemi ortonormali sono sistemi ortonormali.*

Dimostrazione. In finito dimensionale è ovvio. In infinito dimensionale la densità di Q dà approssimazioni razionali arbitrariamente vicine all'ION. La distanza tra due elementi di un ION o tra le loro approssimazioni è $\sqrt{2}$, e questo dimostra che l'ION può essere immerso iniettivamente con Q. □

Esempio. $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \#)$ *non è separabile perché* $\chi_{\{x\}}$ *è ortonormale non numerabile.*

Teorema 9.1 (Fischer-Riesz)**.** *Sia* $\{x^j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$*,* $\underline{e}$ *SON, e* $\xi_N = \sum_{j=1}^{N} x^j e_j$
Allora ξ_N *converge se e solo se* $\{x^j\} \in \ell_2$
Inoltre se questo avviene $\|\xi\| = \|\{x^j\}\|$

Dimostrazione. Si mostra che la successione è di Cauchy traducendo norme di $\mathcal{H}$ in norme di $\mathbb{C}$ per ortornormalità. Una volta dimostrato che esiste, si calcola la norma nello stesso modo. □

Proposizione 9.2. *Sia $\underline{e}$ SON. Allora*

1. $\sum_{j=1}^{\infty}(e_j|x)e_j = \tilde{x}$ *converge sempre e* $\|\tilde{x}\| \leq \|x\|$

2. $\tilde{x}$ *è il proiettato di* x *su* $V = V(\underline{e})$ *e* $\|\tilde{x}\| = \|x\|$ *se e solo se* $x \in \bar{V}$

Dimostrazione. 1. Basta scrivere per esteso $\|x - \xi_n\|^2 \geq 0$ e vedere che il secondo addendo converge per Fischer-Riesz.

2. Aggiungendo sempre più elementi di base diminuisce la distanza dallo spazio generato, quindi converge. Con approssimazioni finite, la formula è esattamente quella della proiezione.

□

Definizione. *Un SONC è un SON massimale.*

Teorema 9.2. *Sono equivalenti:*

1. $\underline{e}$ *è un SONC*

2. $(e_n|x) = 0\ \forall n$ *implica* $x = 0$

3. $\overline{V}(\underline{e})$ *è denso*

4. $x = \sum_{j=1}^{\infty}(e_j|x)e_j$ *(sviluppo di Fourier generalizzato)*

5. $(x|y) = \sum_{j=1}^{\infty}(x|e_j)(e_j|y)$ *(uguaglianza di Parseval)*

6. $\sum_{j=1}^{\infty}|(x|e_j)|^2 = \|x\|^2$

Dimostrazione. (1) $\implies$ (2) Se ci fosse un x che viola (2) potrei normalizzarlo e aggiungerlo al SONC per ottenerne uno più grande.
(2) $\implies$ (3) $\overline{V} = V^{\perp\perp}$
(3) $\implies$ (4) Secondo punto del teorema precedente.
(4) $\implies$ (5) Si scrivono x e y sul SONC.
(5) $\implies$ (6) $x = y$.
(6) $\implies$ (1) Un SON non massimale fornisce un controesempio a (6). □

Esercizio 9.1. *La mappa*

$$\ell_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}$$
$$\underline{x} \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$$

è un'isometria.

Esercizio 9.2. *Uno spazio di Hilbert ammette almeno un SONC se e solo se è separabile.*

10 22 Marzo

Definizione. *Un insieme è limitato in se sta in una bolla.*

Definizione. *Un operatore è limitato se manda insiemi limitati in insiemi limitati.*

Teorema 10.1. *Sono equivalenti:*

1. *A è limitato*
2. *L'immagine di $D_A \cap S_1$ è limitata.*
3. *$\exists c \geq 0 \ \|Ax\| \leq c\|x\|$*
4. *A è continuo*
5. *A è continuo in 0*

Dimostrazione. (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) $\implies$ (1), (4) $\iff$ (5), (3) $\iff$ (5)
(1) $\implies$ (2) $D_A \cap S_1$ è limitato.
(2) $\implies$ (3) Se x non sta nel nucleo di A, come c basta $\|Ax/\|x\|\|$.
(3) $\implies$ (1) Per definizione.
(4) $\iff$ (5) Continuità in y: $lim_n \|Ay - Ay\| = 0 = \lim_n \|Ax_n\| = 0$
(3) $\implies$ (5) Una successione che tende a 0 viene mappata a 0
(5) $\implies$ (3) Sia $\|Ax_n\| > n\|x\|_n$. Allora $x_n/n\|x_n\|$ tende a zero ma la sua immagine tende a 1. $\square$

Esercizio 10.1. *Operatori lineari da spazi di dimensione finita sono continui. Suggerimento:*

1. *$\mathcal{V}$ ha un SONC*
2. *La sfera è compatta*

Esercizio 10.2. *Sulle successioni finite di ℓ_2, il prodotto per una successione è continuo se e solo se è una successione ℓ_2.*

Nota. *In dimensione infinita, la sfera unitaria è chiusa e limitata ma non compatta.*

Definizione. *La norma di un operatore è il più piccolo c che soddisfa il punto 3) del teorema sopra.*

Teorema 10.2. *Lo spazio delle mappe lineari è una varietà lineare con seminorma, e se lo spazio di arrivo è di Banach è completo.*

Dimostrazione. Il $c_{\alpha A+\beta B} \leq |\alpha|c_A + |\beta|c_B$ mostra che la norma è una seminorma. Se il dominio delle mappe è l'intero spazio allora è una norma perché per avere norma nulla devi essere nullo ovunque. Il limite di una successione di Cauchy di mappe si costruisce puntualmente usando la completezza dello spazio di arrivo. $c_A \leq c_{A-A_n} + c_{A_n}$ mostra che il limite è ancora limitato. $\square$

Proposizione 10.1. *Una mappa continua ammette sempre estensione alla chiusura del suo dominio.*

Dimostrazione. Per i punti fuori dal dominio si usa una successione che tende a x, che per continuità viene mappata a una successione di Cauchy in W. La mappa è ben definita perché $Ax' - Ax = A(x - x') \to 0$. $\square$

11 23 marzo

Esercizio 11.1. $\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|$

Teorema 11.1 (Riesz)**.** *La mappa $x \mapsto T_x$ è un isomorfismo antilineare fra $\mathcal{H}$ e il suo duale topologico.*

Dimostrazione. Il nucleo di un funzionale continuo è un ortogonale, perciò è sottospazio di Hilbert e decompone $\mathcal{H}$.

Se il nucleo del funzionale è tutto $\mathcal{H}$, $\mu = 0$. Altrimenti mostriamo che ha codimensione 1.

Prendiamo un elemento ortogonale al nucleo di norma 1 e e un qualsiasi v: $v - e\mu(v)$ sta sia nel nucleo che nel suo ortogonale, quindi è nullo e v è un multiplo di e.

A questo punto per ogni y:

$$\begin{aligned}
\mu(y) &= \mu(y_0 + y_1) && (11.0.1)\\
&= \mu(y_1) && (11.0.2)\\
&= \mu((e|y_1)e) && (11.0.3)\\
&= \mu((e|y)e) && (11.0.4)\\
&= (\mu(e)^* e|y) && (11.0.5)
\end{aligned}$$

così che $x = \mu(e)^* e$ rappresenta μ. $\square$

Esercizio 11.2. *Il duale topologico con il prodotto scalare indotto da questo isomorfismo è uno spazio di Hilbert.*

Esempio. *L'operatore di posizione è limitato su $L_2([0,1])$, ma non su $L_2(\mathbb{R})$*

Esempio (Operatori di Hilbert-Schmidt)**.** *Sia $K \in L_2(X^2, \mu^2, \mathbb{C})$. Definiamo l'operatore $f \mapsto \mathcal{K}f := \int_X K(x,y) f(y) d\mu(x)$*

Esercizio 11.3. $\|\mathcal{K}\| \le \|K\|$ *(l'uguaglianza vale se $\mathcal{H}$ è separabile).*

Esercizio 11.4. $\|\mathcal{K}\| = \|K\|$ *nel caso $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$*

Esempio (Operatori di convoluzione)**.** *Sia $G \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Definiamo l'operatore $f \mapsto A_G f := \int_{R^n} G(x-y) f(y) dm(y))$*

Esercizio 11.5. $\|A_G\| \le \|G\|$ *(Suggerimento: se $G \in L_1$, $\sqrt{G} \in L_2$)*

12 24 Marzo

Teorema 12.1. *Ogni operatore limitato su uno spazio di Hilbert ha un aggiunto, che soddisfa* $(x|Ay) = (A^\dagger x|y)$

Dimostrazione. $A^\dagger$ associa ad x il ket che rappresenta secondo Riesz il bra $(x|A$. □

Proposizione 12.1. † *è additiva, antiomogenea, isometrica e antiisomorfismo.*

Esercizio 12.1. *Da queste proprietà, più il fatto che* † *è un'involuzione, segue che* $I^\dagger = I$

Teorema 12.2. $\left\|A^\dagger A\right\| = \|A\|^2$

Dimostrazione. $\|Ax\|^2 = (Ax|Ax) = (x|A^\dagger Ax) \leq \left\|A^\dagger A\right\| \|x\|^2$ mostra che $\|A\|^2 \leq \left\|A^\dagger A\right\|$. Il contrario è Cauchy-Schwartz per gli operatori. □

Nota. *Questa proprietà rende lo spazio una* C^**-algebra.*

Nota. *Gli operatori continui in spazi separabili hanno una matrice.*

Definizione. *Un operatore limitato si dice autoaggiunto se* $A^\dagger = A$*, normale se* $A^\dagger A = AA^\dagger$

Esercizio 12.2. *Sia* f *essenzialmente limitata.*

1. *L'operatore di moltiplicazione per* f *è limitato e la sua norma è l'estremo superiore essenziale di* f
2. *Calcolare il suo aggiunto e mostrare che l'operatore è autoaggiunto se* f *è reale.*

Esercizio 12.3. *L'operatore momento, definito su* $L_2([0,1],\mathbb{C}) \cap C^\infty([0,1],\mathbb{C})$*, non è limitato.*

Esempio. *Gli operatori di shift su* $\ell_2(\mathbb{C})$ *sono uno l'aggiunto dell'altro, ma non commutano. Un prodotto è l'identità, l'altro è la proiezione sull'ortogonale del nucleo di uno.*

Definizione. *Dato* $V < \mathcal{H}$ *definiamo* $x \mapsto P_V x := x_0$ *proiezione ortogonale di* x *su* $\mathcal{V}$

Nota. *Il teorema della proiezione garantisce che gli operatori di proiezione sono lineari e di norma al massimo 1.*

13 29 Marzo

Proposizione 13.1. *La proiezione su un sottospazio di Hilbert è limitata.*

Teorema 13.1 (Di caratterizzazione)**.** *Un operatore limitato è un proiettore se e solo se è idempotente e autoaggiunto.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) L'idempotenza si vede, mentre inserendo nel prodotto scalare termini ortogonali si ha

$$\begin{aligned}(x|Py) &= (x|y_0) && (13.0.1)\\ &= (x_0 + (x - x_0)|y_0) && (13.0.2)\\ &= (x_0|y_0 + (y - y_0)) && (13.0.3)\\ &= (x_0|y) && (13.0.4)\\ &= (Px|y) && (13.0.5)\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) L'immagine di P è uno spazio di Hilbert per continuità e idempotenza. Usando il teorema della proiezione

$$\begin{aligned}(x - Px|y) &= (x - Px|Py) && (13.0.6)\\ &= (P^{\dagger(x-Px)|y}) && (13.0.7)\\ &= (Px - P^2x|y) = 0 && (13.0.8)\end{aligned}$$

□

Definizione. *Un'isometria suriettiva di spazi di Banach è una mappa unitaria.*

Teorema 13.2. *Se U è operatore limitato di uno spazio di Hilbert:*

1. *U è isometrico se e solo se $U^\dagger U = I$*
2. *U è unitario se e solo se $U^\dagger = U^{-1}$, ovvero $U^\dagger U = UU^\dagger$*

Dimostrazione.
1. $0 = (Ux|Uy) - (x|y) = ((U^\dagger U - I)x|y)$
2. ($\Longrightarrow$) è banale. ($\Longleftarrow$): isometria per il punto sopra, suriettivo perché $x = U(U^\dagger x) = Uy$.

□

Corollario 13.1. *U è unitario se e solo se sia U che $U^\dagger$ sono isometrie.*

Teorema 13.3. *Su spazio separabile, se U è lineare e almeno un SONC viene mandato in un SONC, U è unitario.*

Dimostrazione. ($\Longleftarrow$) L'ortornormalità è preservata, e grazie alla suriettività se $(f|x) = 0\ \forall j$ si ha che $(Ue|Uy) = 0$ e $x = U0 = 0$.

($\Longrightarrow$) Se U manda e in f, posso usarli per scrivere l'azione di U sul resto dei punti. L'operatore ottenuto è densamente definito ed è continuo di norma 1, quindi estende a una isometria. La preimmagine di un punto ha i suoi stessi coefficienti sul SONC di partenza. □

Esercizio 13.1. *In uno spazio separabile, U è isometria se e solo se ogni SONC viene mandato in un SONC.*

Esercizio 13.2. *Gli isomorfismi di spazi di Banach sono precisamente le mappe unitarie.*

Definizione. *Diciamo che due proiettori sono ortogonali se la loro somma è un proiettore.*

Esercizio 13.3. *La somma di due proiettori è un proiettore se e solo se le immagini sono ortogonali.*

Esercizio 13.4. *Quando il prodotto di due proiettori è un proiettore?*

Definizione. *Una successione di operatori limitati converge:*

- *uniformemente se converge nella norma operatoriale*
- *fortemente se converge la sequenza delle immagini di ogni punto*
- *in media se converge il valore di aspettazione di ogni punto*

Esercizio 13.5. *Convergenza uniforme implica convergenza forte.*

Esercizio 13.6. *Se D_A è denso $(y|Ax) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n (y|Ae_n)$*

Definizione. *La topologia debole su uno spazio di Hilbert è la topologia forte sui funzionali continui, tirata indietro con Riesz.*

Esercizio 13.7. $w - \lim_{n\to\infty} e_n = 0$

Esercizio 13.8. *Caratterizzare gli aperti della topologia debole.*

14 30 Marzo

Definizione. $\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} dm(x) f(x) e^{-ik\cdot x}$

Proposizione 14.1. *La trasformata di Fourier è definita su L_1 a valori nelle spazio delle funzioni continue e limitate.*

Dimostrazione. $|\hat{f}| \leq \|f\|_1 / 2\pi^{n/2}$ perché va via la fase. È continua più o meno per lo stesso motivo. □

Esempio. $\hat{G}_\sigma = \frac{1}{\sigma} G_{\frac{1}{\sigma}}$

Proposizione 14.2. *Proprietà della trasformata di Fourier:*

1. $\wedge[f(x-a)] = e^{iax}\hat{f}(k)$
2. $\wedge[e^{iax} f(x)] = \hat{f}(k-a)$

3. $\wedge x_j f(x) = i\frac{\partial}{\partial k_j}\hat{f}(k)$

4. $\wedge \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = ik_j f(k)$

Dimostrazione. 1. Cambio variabile tattico

2. Cambio variabile tattico

3. Tipo trucchetto di integrazione di Benenti, noto che quell'x_j potrebbe benissimo venire dalla derivata dell'esponenziale rispetto a k_j.

4. Per parti.

□

Esercizio 14.1. *Nella dimostrazione del punto 4) era lecito portar fuori la derivata.*

Definizione. *Se $I \in \mathbb{Z}^n_{\geq}$ è un multiindice definiamo*

$$|I| = \sum_n i_n \tag{14.0.1}$$

$$I! = \prod_n i_n! \tag{14.0.2}$$

$$x^I = \prod_n x_n^{i_n} \tag{14.0.3}$$

$$\partial_x^I = \prod_n \partial_{x^n}^{i_n} \tag{14.0.4}$$

Esercizio 14.2. *1. Se $x^I f(x) \in L_1\ \forall |I| \leq p$ allora $\hat{f}(k) \in C^p$. Calcolare $\hat{f}$*

2. Se $f \in C^p$ e $\partial_x^I\ \forall |I| \leq p$ allora $\lim_{k\to\infty} \|k\|^q \hat{f}(k) = 0\ \forall q < p$

Definizione. *Lo spazio di Schwarz è lo spazio delle funzioni C^∞ con derivate a decrescenza più rapida di qualsiasi polinomio.*

Proposizione 14.3. *$\wedge$ è uno operatore lineare su S.*

Dimostrazione. $\vee \wedge f = f$ non dà grattacapi. Per l'inverso l'obiettivo è domare un'onda piana per scambiare l'ordine di integrazione delle trasformate. Se usiamo la meravigliosa equazione $1 = \lim_{\varepsilon\to 0} G(\varepsilon k)$, dopo Fubini non staremo più antitrasformando $\hat{f}$ ma G.

$$\begin{aligned}
\wedge \vee f &= \frac{1}{2\pi^{n/2}} \int dm(k) \lim_{\varepsilon\to 0} G(\varepsilon k) e^{ik\cdot x} \int dm(z) e^{-ikx} f(z) && (14.0.5)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int dm(z) f(z) \left(\frac{1}{2\pi^{n/2}} \int \frac{dm(q)}{\varepsilon^n} G(q) e^{i\frac{q}{\varepsilon}\cdot(x-z)} \right) && (14.0.6)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \frac{dm(z)}{\varepsilon^n} f(z) G\left(\frac{z-x}{\varepsilon}\right) && (14.0.7)\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int dm(y) f(x+\varepsilon y) G(y) && (14.0.8)\\
&= f(x) \int dm(y) G(y) && (14.0.9)\\
&= f && (14.0.10)
\end{aligned}$$

$\square$

Esercizio 14.3. *$\wedge$ è continuo su $(S, \|\cdot\|_1)$?*

Definizione. $\check{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} dm(x) f(x) e^{ik\cdot x} = \hat{f}(-k)$

Teorema 14.1. *Su S $\vee\wedge = \wedge\vee = I$, in particolare $\wedge$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.*

15 31 Marzo

Proposizione 15.1. $\wedge : S_{\|\cdot\|_2} \to S_{\|\cdot\|_2}$.

Dimostrazione. $\hat{f}^* = \vee f^*$ e basta un calcolo diretto di $\left\|\hat{f}\right\|$. $\square$

Teorema 15.1. *Le funzioni L_p positive, limitate e a supporto compatto sono dense in L_p.*

Dimostrazione. La successione dei troncamenti quadrati di una funzione la approssima bene per convergenza dominata. $\square$

Corollario 15.1. *$L_1 \cap L_p$ è denso sia in L_1 che in L_p.*

Dimostrazione. Ogni funzione limitata a supporto compatto è L_1. $\square$

Proposizione 15.2. *Le funzioni semplici a supporto compatto sono dense in L_p.*

Dimostrazione. Funzioni semplici a semplici a supporto compatto approssimano dal basso ogni funzione positiva, limitata e a supporto compatto dato che una funzione così è sommabile, perciò si può usare la convergenza dominata. $\square$

Teorema 15.2. *Le funzioni C^∞ a supporto compatto sono dense in L_p.*

Esercizio 15.1. *Dato un misurabile E posso schiacciarlo tra un compatto (dentro) e un aperto (fuori), di misura arbitrariamente vicina, e approssimare la sua funzione caratteristica con una funzione che vale* 1 *sul compatto e* 0 *fuori dall'aperto.*

Dimostrazione. Compatti e aperti così esistono perché generano l'algebra dei misurabili. L'ingrediente fondamentale è la funzione a campana:

$$C(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\|x\|}} & \|x\| < 1 \\ 0 & \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

Normalizziamola e stringiamola ottendendo $C_\varepsilon^N = a\varepsilon^n C(x/\varepsilon)$. La funzione cercata è allora

$$\Phi(x) = \chi_K \star C_{d/2}^N$$

dove d è la distanza tra K e U^c. Infatti Φ e χ_E sono uguali sul compatto e fuori dall'aperto, e distano meno di 1 nella fascia intermedia, così che $\|\chi_E - \Phi\|_p^p < m(U - K)$. $\square$

Esercizio 15.2. *La regolarizzazione della funzione caratteristica del compatto con la funzione a campana soddisfa queste proprietà.*

Corollario 15.2. *S è denso in L_p.*

Dimostrazione. Riassumendo, con funzioni C^∞ a supporto compatto, tutte in S, posso approssimare funzioni semplici a supporto compatto, che a loro volta approssimano funzioni limitate a supporto compatto, che infine approssimano funzioni L_p generiche. □

Corollario 15.3. *$\wedge$ si estende a una mappa continua $\mathscr{F}_p$ su L_p. In particolare $\mathscr{F}_2$ è un operatore unitario e $\mathscr{F}_2^{-1}$ è l'estensione di $\vee$.*

Dimostrazione. $\wedge$ è continuo perché è continuo in 0, dando l'integrale di una funzione che tende a 0. □

Esercizio 15.3. *Su $L_1 \cap L_2$ abbiamo che $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 = \wedge$.*

Corollario 15.4 (Teorema di Riemann-Lebesgue)**.** *La trasformata di una funzione L_1 è continua e tende a 0 all'infinito.*

16 5 Aprile

Lemma 16.1 (Du Bois-Reymond)**.** *Sia $f \in L_1$. Se $\int_{\mathbb{R}^n} dm(x) f(x) g(x) = 0$ per ogni funzione C^∞ a supporto compatto $f = 0$.*

Dimostrazione. $\chi_{B_n}\mathrm{sgn}$ sta in L_p e posso approssimarlo con funzioni C^∞ a supporto compatto. Se L'integrale sopra fa zero anche prendendo queste funzioni, la funzione è nulla, perché l'integrale è la norma L_1 della funzione (convergenza dominata). □

Teorema 16.1. *$\mathscr{F}_1 : L_1 \to \{f$ continua e tende a zero all'infinito $\}$ è continua e iniettiva.*

Dimostrazione. Se $\hat{f} = 0$ vale $((\hat{f})^*|g) = ((f^*)^\vee|g) = (f^*|\hat{g})$ per ogni g in S, che comprende la funzioni C^∞ a supporto compatto. □

Esercizio 16.1. *Su S vale $\hat{\hat{f}}(k) = f(-k)$*

Esempio. *La trasformata di $f(x) = \frac{1}{x+i}$, che sta in L_2 ma non in L_1, si calcola esprimento la funzione come limite di $\chi_{-R,R} f$, e $\hat{f} = -\sqrt{(}2\pi) i e^{-k} \theta(k)$*

Esempio. $f = \operatorname{sinc} x \in L_1 \cap L_2$ *quindi si può usare la trasformata usuale e* $\hat{f} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}[\theta(1-k) - \theta(-1-k)]$

Definizione. *Le funzioni di Hermite sono la riduzione a SON mediante Gram-Schmidt dell'insieme ${x^j e^{-x^2}}_{j \geq 0}$.*

Teorema 16.2. *Le funzioni di Hermite formano un SONC per $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, che pertanto è uno spazio di Hilbert separabile.*

Dimostrazione. Se $(u|f) = 0$ questo vale anche per i monomi di partenza, dato che lo span è lo stesso, e in particolare per la seguente combinazione

$$0 = \sum \int dx \frac{(-ikx)^n}{n!} e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) \tag{16.0.1}$$

$$= \int dx e^{-ikx} e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) \tag{16.0.2}$$

$$= 2\pi \mathcal{F}_1(e^{-\frac{x^2}{2}} f(x)) \tag{16.0.3}$$

e la completezza segue dall'iniettività della trasformata di Fourier. □

Esercizio 16.2. *L_p è uno spazio di Banach separabile.*

Corollario 16.1. *$L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ è separabile.*

Dimostrazione. $L_2(\mathbb{R}^n) = \otimes_n L_2(\mathbb{R})$ e la collezione degli $u_I = \prod u_{i_n}(x_{i_n})$ al variare del multiindice è un SONC: l'ortonormalità segue dalla fattorizzazione dell'integrale, la completezza per induzione. □

Esercizio 16.3. *Se E è misurabile $L_2(E, \mathbb{C})$ è separabile.*

17 6 Aprile

Definizione. *Polinomi e funzioni di Hermite (Fisici):*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{17.0.1}$$

$$= \{1, 2x, 4x^2 - 2, 8x^3 - 4, \dots\} \tag{17.0.2}$$

$$v_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{17.0.3}$$

$$u_n = \frac{v_n}{\|v_n\|} \tag{17.0.4}$$

Esercizio 17.1. $(v_n|v_m) = \delta_{mn} \|v_n\|^2$. *Calcolare* $\|v_n\|^2$.

Dimostrazione. Si usa la funzione generatrice (esponenziale) $e^{\frac{x^2}{2}-(x-t)^2} = \sum \frac{t^n}{n!} v_n(x)$.

$$\int dx G(t,x) G(s,x) = \int dx \sum \sum \frac{t^n}{n!} \frac{s^n}{n!} v_n(x) v_m(x) \tag{17.0.5}$$

$$= \sum \sum \frac{t^n}{n!} \frac{s^n}{n!} (v_n v_m) \tag{17.0.6}$$

$$= \int dx e^{-(x-s-t)^2+2st} \tag{17.0.7}$$

$$= \sqrt{\pi} e^{2st} \tag{17.0.8}$$

$$= \sqrt{\pi} \sum \frac{2^k s^k t^k}{n!} \tag{17.0.9}$$

$$(v_m|v_n) = \delta_{mn} \sqrt{\pi} 2^k n! \tag{17.0.10}$$

così che il SONC è dato da

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n x}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$$

□

Esercizio 17.2. *Calcolare v_n' e v_n'' e determinare un'equazione differenziale del 2° ordine per v_n.*

Esercizio 17.3. *L'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico è un operatore non continuo.*

Esercizio 17.4. $\hat{u_n} = (-i)^n u_n$

Esercizio 17.5. $\{\sqrt{2} u_{2k}\}$ *e* $\{\sqrt{2} u_{2k+1}\}$ *sono SONC per* $L_2((0, +\infty))$.

Esercizio 17.6. *Ricavare un SONC per* $L_2((0, +\infty))$ *da* $\{x^j e^{-x}\}$ *(Suggerimento: funzioni date da* $e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$*)*

Esercizio 17.7. *Ricavare un SONC per* $L_2([-1, 1])$ *da* $\{x^j\}$. *(Suggerimento:* $(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n$*)*

Definizione. *SONC di Fourier su* $L_2[a, a+L] = L_2([a, b))$*:* $u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi}{L}nx}$

Nota. *Una funzione su* $[a, b)$ *si estende sempre per periodicità su* $\mathbb{R}$.

Nota. *L'approssimazione di Fourier di una funzione si può esprimere in termini del nucleo di Dirichlet:*

$$\Phi_n = \sum_{-n}^{n} (u_j|f) u_j \tag{17.0.11}$$

$$= f \star D_n \tag{17.0.12}$$

$$D_n = \frac{\sin(n+1/2)\frac{\pi}{L}x}{L \sin \frac{\pi}{L} x} \tag{17.0.13}$$

Teorema 17.1 (Teorema del Dini). *Se*

- f *è limitata*
- $g(z) = \frac{f(x+z)-f(x)}{z}$ *è localmente sommabile in* $z = 0$
  (cioè $g \in L_1(B_\varepsilon(0))$*)*

allora $\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) - f(x) = 0$

Dimostrazione. Se l'incremento è localmente sommabile in 0 lo è ovunque e scarto è la trasformata di una funzione continua L_1 che tende a 0 per Riemann-Lebesgue. □

Definizione. *La somma di Cesàro associata a una successione è la successione delle medie dei primi n termini.*

Esercizio 17.8. *Mostrare che il nucleo di Frejér, la somma di Cesàro della successione dei nuclei di Dirichlet, è uguale a*

$$F_n = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{L} nx}{nL \sin^2 \frac{\pi}{L} x}$$

Teorema 17.2 (Frejér). *Se* f *è continua e periodica su* $\mathbb{R}$*, la somma di Cesàro delle approssimazioni di Fourier di* f*, data dalla convoluzione con il nucle di Frejér, converge uniformemente a* f*.*

Dimostrazione. $|C_n - f(x)| \leq \left(\int_{[-\frac{L}{2},\delta)} + \int_{(\delta,\frac{L}{2}]} + \int_{[-\delta,\delta]}\right) |f(x+y) - f(x)| F_n(x) dx$

L'unico problema può sorgere, per n grande, in $y = 0$, dove il nucleo di Frejér va come n. Ma nell'intorno di 0 che abbiamo identificato f è uniformemente continua e il suo incremento è uniformemente limitato a quanto vogliamo. □

Esercizio 17.9. *Se* $f \in L_1([a,b])$ *la funzione integrale è continua e la sua derivata è uguale a* f *quasi ovunque.*

Esempio. $f = e^x$ *su* $[-1,1]$ *dà come coefficienti*

$$c_n = \frac{2\pi i}{\sqrt{2}} \frac{n}{1+\pi^2 n^2}$$

Il calcolo della norma di f *permette di calcolare la serie notevole*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+\pi^2 n^2)^2} = \frac{\sinh 2}{4\pi^2}$$

Proposizione 17.1. *Se* $c_n \in \ell_1$ *la sua serie di Fourier è una funzione continua.*

Dimostrazione. Se c è ℓ_1 allora $f = \sum_n c_n u_n$ converge assolutamente e quindi la successione di funzioni converge uniformemente, perché non dipende da x, pertanto il limite è una funzione continua. □

Proposizione 17.2. *Se f è continua e periodica su $\mathbb{R}$ si ha $f'_n = (2n\pi i/L) f_n$.*

Dimostrazione. Integrando per parti i coefficienti di f' il termine di bordo sparisce grazie all'ipotesi. □

Proposizione 17.3. *Se f è continua e periodica su $\mathbb{R}$ e di classe C^1 allora f è uguale alla sua serie di Fourier.*

Dimostrazione.

$$\sum_n |f_n| = |f_0| + \sum_{n>0} n|f_n|\frac{1}{n} \tag{17.0.14}$$

$$\leq |f_0| + \left(\sum_{n>0} n^2 |f_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} \tag{17.0.15}$$

$$= |f_0| + \left(\sum_{n>0} |f'_n|^2 \frac{L^2}{4\pi^2}\right)^{1/2} \frac{\pi}{\sqrt{3}} \tag{17.0.16}$$

$$= |f_0| + \frac{L^2}{4\pi^2} \left(\|f'\|^2 - |f_0|^2\right) \frac{\pi}{\sqrt{3}} < \infty \tag{17.0.17}$$

□

Proposizione 17.4. *Se f è continua e periodica su $\mathbb{R}$ e di classe C^k allora $\lim_{n\to\infty} n^k f_n = 0$. Se f è C^∞, f_n decresce rapidamente.*

Dimostrazione. Come nel caso $k = 1$ si ha $f^{(k)} = \left(\frac{2\pi i n}{L}\right)^k f_n$. Ma essendo le derivate ancora L_2 si ha $\sum_n |f_n^{(k)}|^2 = \sum_n n^{2k} |f_n|^2 < \infty$, quindi a lungo andare si ottiene che $\lim_n n^k f_n = 0$. □

Esercizio 17.10. *Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier di* $\sin(z(\sin(x)))$ *e* $\cos(z\sin(x))$*.*

18 26 Aprile

Proposizione 18.1. *Non esiste una coppia di operatori limitati che soddisfi la relazione di commutazione canonica.*

Dimostrazione. Se $[X, P] = \alpha I$ allora $[X, P^n] = n\alpha P^{n-1}$ per Leibniz sostanzialmente. Ma $\|[X, P^n]\| = n\alpha \|P^{n-1}\| \leq 2\|XP^n\| \leq 2\|X\|\|P\|\|P^{n-1}\|$ mostra che l'ipotesi che entrambi siano limitati porta a una contraddizione. □

Esercizio 18.1. *Il prodotto di due spazi di Hilbert è uno spazio di Hilbert con la somma dei prodotti interni.*

Proposizione 18.2. *Γ è il grafico di una mappa lineare se e solo se*

1. *Γ è sottospazio vettoriale di $H \times H'$*

2. *L'unico punto con ascissa 0 è l'origine.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) per linearità. ($\Longleftarrow$) Il dominio è la proiezione del grafico sull'asse delle ascisse. La seconda proprietà garantisce che ogni punto del dominio abbia un'immagine univocamente definita. $\square$

Definizione. *Un operatore è chiudibile se la chiusura del suo grafico è un grafico, e la chiusura dell'operatore è l'operatore associato alla chiusura del grafico. Un operatore chiuso è un operatore uguale alla sua chiusura.*

Esercizio 18.2. *La chiusura di un operatore limitato è la sua estensione per continuità alla chiusura del dominio.*

Esercizio 18.3. *Su $H = L_2([-1,1])$ l'operatore $(\delta, C([-1,1]))$ non è chiudibile.*

> **Proposizione 18.3.** *Un operatore è chiudibile se e solo se le uniche successioni di ascissa tendente a zero la cui ordinata converge sono quelle che convergono all'origine.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Se l'operatore è chiudibile ed esiste una tale successione, la chiusura del grafico deve avere un punto di ascissa 0, che è l'origine dato che la chiusura del grafico è ancora un grafico.

($\Longleftarrow$) Se l'operatore non è chiudibile esiste un punto di accumulazione del grafico di ascissa nulla e ordinata non nulla. Per definizione c'è una successione che tende ad esso, e che fa quindi da controesempio. $\square$

Esercizio 18.4. *Un operatore è chiuso se il suo grafico contiene i limiti delle successioni convergenti.*

Esercizio 18.5. *$V : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2$, $(x, y) \mapsto (y, -x)$ è unitario.*

19 27 Aprile

Definizione. *Un operatore è aggiuntabile se $(V\Gamma_A)^\perp$ è ancora un grafico, e l'operatore associato a questo grafico è il suo aggiunto.*

Proposizione 19.1. *Un operatore è aggiuntabile se e solo se è densamente definito.*

Dimostrazione. Se $(0, y) \in (V\Gamma_A)^\perp$ abbiamo $0 = \langle (0, y) | (Ax, -x) \rangle = -(y|x)$ per ogni punto del dominio. Perciò $y = 0$ se $D_A^\perp = 0$. $\square$

Proposizione 19.2. *Sia A aggiuntabile. Allora:*

1. *Il suo aggiunto è chiuso*

2. *A è chiudibile se e solo se il suo aggiunto è aggiuntabile, e in tal caso la sua chiusura è l'aggiunto dell'aggiunto*

3. *Se A è chiudibile, la sua chiusura è aggiuntabile e il suo aggiunto è l'aggiunto di A*

4. *Il dominio dell'aggiunto è costituito dagli x tali che il bra $(x|A : D_A \to \mathbb{C}$ è continuo, e $A^\dagger x$ è il ket che lo rappresenta.*

5. $\ker A^\dagger = (\operatorname{Im} A)^\perp$

Dimostrazione. 1. Il suo grafico è un ortogonale.

2. Il doppio ortogonale è la chiusura, e due rotazioni di 90° lasciano il grafico invariato.

3. La chiusura non può che essere ancora densamente definita, e la rotazione di un chiuso è chiusa.

4. Stesso ragionamento con cui si è formulata l'aggiuntabilità.

5. Se x è ortogonale a $\operatorname{Im} A$, $A^\dagger x$ è ortogonale a D_A, che è denso, e viceversa. □

Definizione. *Se $D_A \subset D_B$ e $B|_{D_A} = A$ diciamo che $A \subset B$.*

Esercizio 19.1. *1. $A \subset B$ se e solo se $\Gamma_A \subset \Gamma_B$.*

2. *Se $A \subset B$ aggiuntabili $B^\dagger \subset A^\dagger$.*

3. $(AB)^\dagger$

4. $A^\dagger + B^\dagger ? (A+B)^\dagger$

5. $(kA)^\dagger = k^* A^\dagger \; \forall k \neq 0$
   Se $k = 0$ $(kA)^\dagger \supset k^* A^\dagger$

Definizione. *Un operatore aggiuntabile è simmetrico se $A \subseteq A^\dagger$*

Proposizione 19.3. *Un operatore è simmetrico se e solo se è densamente definito e $(Ax|y) = (x|Ay) \; \forall x, y \in D_A$.*

Dimostrazione. Di base se $x \in D_{A^\dagger}$ abbiamo $(x|A = (z$. Se vale l'ipotesi e $x \in D_A$, $z = Ax$, quindi $A^\dagger$ coincide con A. □

Definizione. *Un operatore simmetrico è autoaggiunto se $A = A^\dagger$.*

Teorema 19.1. *Sia A simmetrico. Allora sono equivalenti:*

1. *A è autoaggiunto*

2. *A è chiuso e $A^\dagger \pm iI$ è iniettivo*

3. *$A \pm iI$ è suriettivo*

4. $A^\dagger \subset A$

Dimostrazione. (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) $\implies$ (4) $\implies$ (1)

(1) $\implies$ (2) $A \subset A^\dagger$ è chiuso perché gli aggiunti sono chiusi, e il range numerico di $A^\dagger$ è il coniugato di quello di A, quindi è reale.

(2) $\implies$ (3) $\ker(A^\dagger \pm iI) = \ker((A \mp iI)^\dagger) = \mathrm{Im}(A \mp iI)^\perp$. Basta dimostrare che quest'immagine è chiusa.

Prendiamo un $y^\pm$ punto di accumulazione con la sua successione di Cauchy $(A \pm iI)x_n^\pm$. Possiamo avvicinare coppie di termini a piacimento, e grazie al fatto che A è simmetrico nel calcolo della loro distanza spariscono i termini misti. Entrambi i casi si semplificano a

$$\|y_m - y_n\|^2 = \|A(x_m - x_n)\|^2 + \|x_m - x_n\|^2 = \|(x_m, y_m) - (x_n, y_n)\|^2_{\mathcal{H}^2} \to 0$$

Abbiamo quindi una successione convergente nel grafico, che è chiuso, e quindi contiene il suo limite.

(3) $\implies$ (4) Per la suriettività di $A \pm iI$ per ogni $x \in D_{A^\dagger}$ c'è un $x^\pm \in D_A$ tale che $(A \pm iI)x^\pm = (A \pm iI)x = (A^\dagger \pm iI)x$ e quindi $x - x^\pm$ sta nel nucleo di $A^\dagger \pm iI$, che è banale in quanto ortogonale all'immagine di $A \mp iI = \mathcal{H}$.

(4) $\implies$ (1) Per definizione, ma ci sta metterlo per simmetria col teorema successivo.

□

20 28 Aprile

Definizione. *In generale $A \subseteq \bar{A} \subseteq A^\dagger$. I casi sono:*

1. $A = \bar{A} = A^\dagger$ *e A è autoggiunto*
2. $A \subsetneq \bar{A} = A^\dagger$ *e A si dice essenzialmente autoaggiunto*
3. $A = \bar{A} \subsetneq A^\dagger$ *e A è chiuso ma non autoaggiunto. Non ci siamo. Questo è da buttare.*
4. $A \subsetneq \bar{A} \subsetneq A^\dagger$ *e questo è orribile. Da buttare.*

Esercizio 20.1. *Sia A simmetrico. Allora sono equivalenti:*

1. *A è essenzialmente autoaggiunto*
2. $A^\dagger \pm iI$ *è iniettivo*
3. $A^\dagger \pm iI$ *ha immagine densa*
4. $A^\dagger \subset \bar{A}$

Esempio. *L'operatore $k\partial_x$ definito su $S \in L_2$ è aggiuntabile, simmetrico per k immaginario, essenzialmente autoaggiunto ma non autoaggiunto. Il dominio della sua chiusura, che è autoaggiunta, è lo spazio delle funzioni assolutamente continue.*

Esempio. *Un operatore di moltiplicazione è ben definito se cresce al più polinomialmente, e in tal caso è simmetrico.*

Esercizio 20.2. *Operatori unitariamente equivalenti condividono autoaggiuntezza e chiusura. Mostrare che posizione e momento sono unitariamente equivalenti mediante $\mathscr{F}$.*

Esercizio 20.3. *Per quali condizioni al contorno l'operatore momento su intervallo chiuso è simmetrico?*

Definizione. *Il range numerico di un operatore è l'insieme dei suoi valori di aspettazione.*

Proposizione 20.1. *Un operatore aggiuntabile è simmetrico se e solo se il suo range numerico è reale.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) $(x|Ax) = (Ax|x) = (x|Ax)^*$
($\Longleftarrow$) Identità di polarizzazione: se $x_n = x + i^n y$

$$(x|Ay) = \sum_{n=1}^{4} \frac{(x_n|Ax_n)}{4i^n} \tag{20.0.1}$$

$$(Ax|y) = \sum_{n=1}^{4} \frac{(Ax_n|x_n)}{4i^n} \tag{20.0.2}$$

□

Teorema 20.1 (Robertson)**.** $\Delta_x A\, \Delta_x B \geq \frac{1}{2}|\langle [A,B]\rangle_x|$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\langle [A,B]\rangle_x &= \langle (A - \langle A\rangle_x)B - B(A - \langle A\rangle_x)\rangle_x && (20.0.3)\\
&= \dots && (20.0.4)\\
&= 2i\,\mathrm{Im}((A - \langle A\rangle_x)x|((B - \langle B\rangle_x)x)) && (20.0.5)\\
&\leq 2|((A - \langle A\rangle_x)x|((B - \langle B\rangle_x)x))| && (20.0.6)\\
&\leq 2\,\|(A - \langle A\rangle_x)x\|\,\|(B - \langle B\rangle_x)x\| && (20.0.7)\\
&= 2\Delta_x\, A\Delta_x B && (20.0.8)
\end{aligned}$$

□

21 3 Maggio

Definizione. *Una successione di funzionali converge nella topologia $*$-debole se* $\lim_n \mu(x) - \mu_n x = 0$

Definizione. *S' è la chiusura $*$-debole di S^**

Proposizione 21.1. *Se f è integrabile e $f\phi$ è sommabile per ogni funzione test, T_f è una distribuzione temperata.*

Dimostrazione. Si può usare la successione $\chi_{B_N} f(x)$ che converge $*$-debolmente per convergenza dominata. $\square$

Definizione. *Le distribuzioni così ottenute da una funzione si dicono regolari, altrimenti singolari.*

Proposizione 21.2. $\delta \in S'$

Dimostrazione. Si può usare la successione $k^n f(kx)$ per una qualsiasi funzione normalizzata in $L_1 \cap L_2$. $\square$

Proposizione 21.3. *δ è una distribuzione singolare.*

Dimostrazione. Se ci fosse una successione di funzioni che la approssima, prendiamo una successione di funzioni a campana

$$e^{-\frac{1}{1-|kx|^2}}\chi_{[-1,1]}$$

In 0 questa vale sempre $1/e$, ma valutando un approssimazione $\square$

Esempio. $\delta_a = \delta(x-a)$

Esercizio 21.1. $\delta_{S^n}\phi(x) = \int_{S^n} d\Sigma^n \phi(x)$ *è una distribuzione singolare.*

Definizione. *L'azione di un operatore su una distribuzione si definisce come*

$$A\psi = * - w \lim_n T_{A\psi_n}$$

Esempio. $\partial^I \psi(\phi) = (-1)^{|I|}\psi(\partial^I \phi)$

Esercizio 21.2. *Per le distribuzioni continua a valere il lemma di Schwarz.*

Esercizio 21.3. *∂^I è continuo su S'.*

Esempio. $\delta'\phi = -\phi'(0)$

Esempio. $\theta' = \delta$

Proposizione 21.4. *Se esiste T_f ma $f(a_-) \neq f(a_+)$ esistono finiti allora*

$$T_f' = T_{f'} + \Delta f_a \delta_a$$

Dimostrazione. Per integrare per parti bisogna prima separare:

$$T_f'\phi = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{a-\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}^{+\infty}\right) f(x)\phi'(x) \tag{21.0.1}$$

$$= f(x)\phi(x)\Big|_{a^+} - f(x)\phi(x)\Big|_{a^+} + \int_{-\infty}^{+\infty} dx f'(x)\phi(x) \tag{21.0.2}$$

$\square$

22 4 Maggio

Esempio. $\frac{d}{dx}\log|x-x_0| = \mathcal{P}(\frac{1}{x-x_0})$

Proposizione 22.1 (Formula di Sokhotski-Plemelj)**.**

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta$$

Dimostrazione. Calcoliamo il lato sinistro come limite della derivata di una distribuzione discontinua, che presenta polidromia:

$$\log(x+i\varepsilon) = \log|x+i\varepsilon| + i\begin{cases} 0+\varepsilon+\dots & x>0 \\ \pi-\varepsilon+\dots & x<0 \end{cases} \tag{22.0.1}$$

$$= \log|x+i\varepsilon| + i\pi\theta(-x) \tag{22.0.2}$$

$$\tag{22.0.3}$$

così che nel limite $\varepsilon \to 0$ otteniamo

$$*w - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x+i\varepsilon} = \frac{d}{dx}(\log|x| + i\pi\theta(-x)) \tag{22.0.4}$$

$$= \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta \tag{22.0.5}$$

$$\tag{22.0.6}$$

□

Esempio. $\Delta T_{1/r} = -4\pi\delta$

Definizione. *Azione di un operatore su una distribuzione:* $Af = f\circ A$

Proposizione 22.2. *Sia* $A = Mx + a$ *una trasformazione affine. Allora*

$$A\tau = \frac{1}{|\det M|}\tau\circ A^{-1}$$

In particolare

$$M\delta = \frac{1}{|\det M|}\delta$$

Dimostrazione. Dalla definizione basta un cambio di variabile inverso, che sputa fuori lo Jacobiano e la matrice inversa (l'integrale è invariante per traslazioni). La δ guarda solo in $x=0$ e quindi non gli interessa se viene tutto stortato. □

Esercizio 22.1. *Sia* f *con numero finito di zeri semplici. Allora*

$$\delta(f(x)) = \sum_{f(x_j=0)}\frac{1}{|f'(x_j)|}\delta(x-x_j)$$

Esercizio 22.2. *Una funzione si dice a crescita algebrica se è localmente L_1 e cresce più lentamente di un polinomio. Il prodotto di una distribuzione con una distribuzione a crescita algebrica è ben definito.*

Definizione. $\hat{\tau} = *w \lim_n T_{\hat{f}_n}$

Proposizione 22.3. $\hat{\tau}\phi = \tau\hat{\phi}$

Dimostrazione. Come quella dopo il lemma di Du Bois-Reymond. □

Esercizio 22.3. $\wedge : S' \to S'$ *è un automorfismo di spazi topologici.*

Esercizio 22.4. *Anche la trasformata di Fourier-Plancherel si può estendere a S' e coincide con $\wedge$.*

23 5 Maggio

Esempio. $\hat{\delta} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}$

Esercizio 23.1. *Si calcolino le trasformate di x^2 ,$1/r$ in $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{P}(x^{-1})$*

Definizione. $f \star g = \int_{\mathbb{R}^4} d^4y f(y) g(x-y)$

Proposizione 23.1. *Il prodotto di convoluzione è ben definito in L_1 a valori in L_1.*

Dimostrazione.

$$\|f \star g)\|_1 = \int dx \left| \int dy f(y) g(x-y) \right| \tag{23.0.1}$$

$$\leq \int dx \int dy |f(y)||g(x-y)| \tag{23.0.2}$$

$$\leq \int dy |f(y)| \int dx |g(x)| \tag{23.0.3}$$

$$= \|f\|_1 \|g\|_1 \tag{23.0.4}$$

$$\tag{23.0.5}$$

□

Proposizione 23.2. $(\tau \star \phi)^\wedge = (2\pi)^{d/2} \hat{\tau}\hat{\phi}$

Dimostrazione.

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int dx e^{-ik(x-y+y)} \int dy f(y) g(x-y) = \tag{23.0.6}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int dy f(y) e^{-iky} \int d(x-y) e^{-ik(x-y)} g(x-y) \tag{23.0.7}$$

□

Esempio. $G_{\sigma_1^2} \star G_{\sigma_2^2} = G_{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$

Esercizio 23.2. *La convoluzione di una distribuzione con una gaussiana è una distribuzione regolare.*

Esercizio 23.3. $\partial^I(\sigma \star \tau) = \partial^{I_1}\sigma \star \partial^{I_2}\tau$ *con* $I_1 + I_2 = I$*.*

24 10 Maggio

Definizione. *Un operatore differenziale lineare è un polinomio di derivate parziali*

Definizione. *La soluzione fondamentale associata a un operatore differenziale soddisfa* $\hat{O}_P G = \delta$*.*

Esempio (Stupido)**.** $\hat{O} = a\frac{d}{dx} \implies G = \frac{1}{a}\theta(x) + k$

Definizione. *Se una distribuzione si annulla su una funzione a supporto contenuto nell'intorno di un punto, il punto non appartiene al supporto della distribuzione.*

Proposizione 24.1. $k\delta^{(n)} = -n\delta^{(n+1)}$

Dimostrazione. Usando la regola di Leibniz con il binomio di Newton:

$$\delta^{(n)}(k\phi) = (-1)^n (k\phi)^{(n)}\Big|_{k=0} \tag{24.0.1}$$

$$= (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k^{(j)}\phi^{(n-j)} \tag{24.0.2}$$

Ma per $j > 1$ k viene derivato fino all'oblio, mentre per $j = 0$ uccide tutto quando si valuta in 0, così che l'unico termine risultante è $(-1)^n n\phi^{(n-1)}$ □

Esempio (Equazione di Poisson)**.**

$$\hat{O} = \Delta \tag{24.0.3}$$

$$G = \begin{cases} \frac{1}{2} + kx + \gamma & d = 1 \\ \frac{1}{2\pi}(\log\frac{r}{2} + \frac{\gamma}{2}) & d = 2 \\ -\frac{1}{4\pi^{\frac{d}{2}}}\Gamma(\frac{d}{2} - 1)\frac{1}{r^{d-2}} & d \geq 3 \end{cases} \tag{24.0.4}$$

Nel caso $d = 2$ *si usa la prescrizione* $+\varepsilon$*.*

25 11 Maggio

Esempio (Equazione del calore)**.**

$$\hat{O} = \partial_t - D\Delta \tag{25.0.1}$$

$$G = G_{\sqrt{2Dt}} \tag{25.0.2}$$

Esempio (Equazione di Schrödinger).

$$\hat{O} = -i\hbar\partial_t - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta \tag{25.0.3}$$

$$G_\pm = \pm\frac{\theta(\pm t)}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}}e^{\mp\frac{3}{4}\pi i + \frac{i\|x\|^2}{4t}} \tag{25.0.4}$$

Per $G_\pm$ (avanzato/ritardato) si usa la prescrizione $\mp i\varepsilon$.

Esempio (Equazione delle onde).

$$\hat{O} = \frac{1}{v^2}\partial_t\Delta \tag{25.0.5}$$

$$G = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^D}\int d^D e^{ik\cdot x}\frac{\sin(v\,\|k\|\,t)}{\|k\|} \tag{25.0.6}$$

$$= \begin{cases} \frac{\theta(t)}{4}v\chi_{[-vt,vt]} & d=1 \\ 2\pi^2\theta(t)\frac{\delta(r-vt)}{r} & d=3 \end{cases} \tag{25.0.7}$$

È un'equazione relativistica, quindi per antitrasformare usiamo $e^{i(-\omega t+k\cdot x)}$. Il propagatore si scompone in quelli delle onde progressive e regressive, e per entrambi si usa le prescrizione $+i\varepsilon$ per ottenere i propagatori ritardati.

26 12 Maggio

Esempio (Equazione di Klein-Gordon).

$$\hat{O} = \partial_t - \Delta + m^2 \tag{26.0.1}$$

$$G_F = i\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^{D-1}2E_k}[\theta(t)e^{i(-E_kt+k\cdot x} + \theta(-t)e^{i(E_kt-k\cdot x)}] \tag{26.0.2}$$

L'equazione è quantistica-relativistica, quindi usiamo il trucco ε di Feynman, cioè la prescrizione $-i\varepsilon$, che restituisce soluzioni a energia positiva che propagano avanti nel tempo (particelle) e soluzioni a energia negativa che propagano indietro nel tempo (antiparticelle).

27 Appendice

Definizione. *Uno spazio ha misura σ-finita se è unione numerabile di sottoinsiemi di misura finita.*

Teorema 27.1. *Un operatore di moltiplicazione per funzione misurabile h:*

1. *è densamente definito*

2. *è aggiuntabile e il suo aggiunto è la moltiplicazione per h^**

3. *è chiuso*

4. *è continuo se e solo h è essenzialmente limitato, e se lo è la sua norma è* $\|h\|_\infty$

Dimostrazione. 1. Ogni funzione può essere approssimata da $\chi_{E_n} f$ dove gli E_n sono i domini sulla quale $f < n$.

2. Sappiamo che M_h è aggiuntabile.

   $M_h^\dagger \supseteq M_{h^*}$: basta raccogliere un coniugato e si ottiene $(g|M_h f) = (M_{h^*} g|f)$ per $f \in D_h$.

   $D_{M_h^\dagger} \subseteq D_{h^*}$: prendiamo una $g \in D_{M_h^\dagger}$ Allora $(g|M_h f) = (M_h^\dagger g|f)$ si può riscrivere come $= (h^* g - M_h^\dagger g|f) = 0$ restringendo l'integrale a E_n, quindi per arbitrarietà di n questo vale ovunque. Finire.

3. È un aggiunto.

4. ($\Longleftarrow$):$\left(\int |h(x)f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq \|h\|_\infty \|f\|$

   ($\Longrightarrow$): La norma delle funzioni caratteristiche normalizzate degli insiemi sui quali $h \in (n, n+1)$(eventualmente intersecati con il ricoprimento di misura finita) viene moltiplicata almeno per n.

□

Teorema 27.2. *Per un operatore di moltiplicazione M_h sono equivalenti:*

1. M_h *è invertibile*

2. h *è non nulla quasi ovunque*

3. $\operatorname{Im} M_h$ *è densa*

Se esiste, l'inverso è l'operatore di moltiplicazione associato all'inverso domato.

Dimostrazione. (1) $\Longrightarrow$ (2) Se M_h fosse invertibile e h fosse nulla su un insieme di misura finita, la funzione caratteristica di questo insieme starebbe nel nucleo di M_h, assurdo.

(1) $\Longleftarrow$ (2) Legge di annullamento del prodotto.

(1) $\Longleftrightarrow$ (3) $\operatorname{Im}(M_h)^\perp = \ker(M_{h^*}) = \ker(M_h)$ □

Definizione. *Una funzione è assolutamente continua su un aperto se, su ogni chiuso contenutovi:*

1. *è continua*

2. *è derivabile quasi ovunque*

3. *la derivata è integrabile*

4. *è la funzione integrale della sua derivata*

Definizione. *$A_n(a,b)$ è lo spazio delle funzioni con le prime $n-1$ derivate assolutamente continue su un intervallo aperto potenzialmente illimitato.*

Lemma 27.1 (Lemma di Sobolev)**.** *Le norma L_2 delle derivate intermedie sono controllate dalla norma della funzione e dell'ultima derivata.*

$\forall\varepsilon\ \exists C$ tale che per $j \leq n-1$

$$\left\|f^{(j)}\right\| \leq \varepsilon \left\|f^{(n)}\right\| + C\left\|f\right\|$$

Definizione. *$W_n(a,b)$ è lo spazio delle funzioni in A_n con le prime n derivate in L_2, ovvero, per il lemma di Sobolev, le funzioni in $L_2 \cap A_n$ con la derivata n-esima in L_2.*

Teorema 27.3. *Le prime $n-1$ derivate di una funzione in W_n agli estremi hanno limite finito, nullo se l'estremo è infinito.*

Definizione. *Gli operatori di derivazione minimali e massimali sono $(-i)^n d^n/dx^n$ rispettivamente sulle funzioni C^∞ a supporto compatto e su W_n*

Lemma 27.2. *L'immagine dell'operatore di derivazione minimale sono le funzioni C^∞ a supporto compatto con i primi $n-1$ momenti nulli.*

Lemma 27.3. *Gli unici funzionali che una combinazione di funzionali non può riprodurre sono quelli che non si annullano sugli zeri comuni della famiglia.*

Teorema 27.4. *L'operatore minimale è simmetrico e il suo aggiunto è l'operatore massimale.*

Teorema 27.5. *Quando l'intervallo è l'intera retta reale, il massimale è autoaggiunto, il minimale essenzialmente autoaggiunto e la sua chiusura è il massimale. Al posto del minimale si può prendere anche l'operatore di derivazione definito su S.*

Teorema 27.6. *Se l'intervallo è più piccolo, la chiusura dell'operatore minimale agisce sulle funzioni di $W_n(a,b)$ che hanno le prime $n-1$ derivate nulle agli estremi finiti.*

Questo nuovo operatore non coincide col massimale e sono uno l'aggiunto dell'altro.

Esempio. *Su intervallo finito, la chiusura del minimale è simmetrica chiusa, mentre il massimale non è neppure simmetrico. Entrambi i loro prodotti invece sono autoaggiunti.*

Esempio. *L'operatore di derivazione con condizioni periodiche al contorno su intervallo finito è autoaggiunto.*

Esempio. *La chiusura del minimale sul semiasse positivo è simmetrica ma non è autoaggiunta, né possiede estensioni autoaggiunte.*