Esercizi di Guarneri

danivolo

1: Calcoli.

2: No perché in generale $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sin(ix) = \sinh(x)$, illimitato, per esempio $|\sin(100i)| = \frac{1}{2}|e^{-100} - e^{100}|$

3-17, 19, 23: Sono su spazi metrici, quindi nada.

18: Sono cammini perché sono mappe continue, la loro traccia è una circonferenza.

20: Una riparametrizzazione $f : [a, b] \to [c, d]$ con $a = c = 0, b = d = 1$ che trasforma γ_1 in γ_2 è tale che $e^{4\pi it} = e^{2\pi i f(t)}$, quindi $f(t) = 2t'$. Ma $f(b) = 2 \neq d$.

21: È una relazione riflessiva perché si può usare $f(t) = t$. Simmetrica perché se f è continua strettamente crescente lo è anche f^{-1}. Transitiva perché la composizione di funzioni continue strettamente crescenti lo rimane, e fa da riparametrizzazione fra il primo e il terzo cammino.

22: Si può riparametrizzare con $f(t) : [a, b] \to [0, 1], t \mapsto \frac{t-a}{b-a}$.

24: Se $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ allora $(Ax_1 + Bx_2)(Cy_1 + Dy_2) - (Cx_1 + Dx_2)(Ay_1 + By_2) = 0$ (conti).

25: $\lim_{z\to\infty} z^n = \lim_{z\to\infty} |z|^n e^{in \arg z}$ = infinito in modulo, non importa la direzione. Per $-\infty$ il limite del modulo è 0 e quindi ancora non importa la direzione.

26: Le parti reale e immaginaria di $f(x + iy) = x - iy$ sono continue.

27: $v = 0 \implies u_x = u_y = 0, u_y = -v_x = 0$.

28: $u_x = 1 \neq v_y = -1$.

29: $u_y = -v_x = 0$, quindi $u = u(x), v = v(y)$. L'unico modo per avere $u(x) = v(y) \forall x, y$ è che entrambe le funzioni siano costanti. Se $u(x_1) \neq u(x_2)$ si avrebbe $v(y_0) = u(x_1) \neq u(x_2) = v(y_0)$ assurdo. Quindi $u = ax + c_1, v = ay + c_2, f = az + c_1 + ic_2$.

30: Cauchy-Riemann.

31:

$$f(x + iy) = \cos S + i \sin S$$
$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S_x \sin S & S_x \cos S \\ -S_y \sin S & S_y \cos S \end{pmatrix}$$

Le Cauchy-Riemann si traducono nel sistema lineare

$$\begin{cases} -S_x \sin S - S_y \cos S = 0 \\ S_x \cos S - S_y \sin S = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$S_x = S_y = 0$ è l'unica soluzione, dato che la matrice associata è invertibile in quanto ha determinante 1. Pertanto S è costante, e così f è costante di modulo 1.

32: $\Re(z)$ schiaccia gli angoli delle rette con l'asse reale, z^* inverte il segno (l'orientazione) degli angoli.

33: È il 31.

34: Svolto.

35:

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= (\cos t, \sin t) \\
\dot{\gamma}(t) &= (-\sin t, \cos t) \\
\int_\gamma V \cdot dP &= \int_0^{2\pi} V(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t \cdot -\sin t + \cos t \cos t}{\sin^2 t + \cos^2 t} \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

36:

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y) &= \arctan(\frac{y}{x}) \\
\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\
\frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{1}{x} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

37: Risolto.

38:

$$\begin{aligned}
V(x, y) &= (x, -y) \\
\dot{x} &= V_x = x? \\
\dot{y} &= V_y = -y?
\end{aligned}$$

Non mi ricordo ma guarneri l'aveva fatto dopo lo copio. DO

39: Basta sapere dove comincia e dove finisce γ. Gli estremi sono 0 e πi, entrambi sull'asse immaginario. Definiamo il cammino $\rho(t) = it, 0 \leq t \leq \pi i$.

$$\begin{aligned}
\int_\gamma dz f(z) &= \oint_{\gamma+\rho} dz f(z) - \int_\rho dz f(z) \\
&= 0 - \int_\rho (e^\rho + e^{-\rho})^2 \dot{\rho} dt \\
&= -\int_0^{\pi i} dt (e^{2t} + e^{-2t} - 1) \cdot i \\
&= -i(e^{2\pi i} + e^{-2\pi i} - \pi i - 1 - 1) \\
&= -\pi
\end{aligned}$$

40: Integrandola sulla circonferenza unitaria si avrebbe

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} ie^{it}f(e^{it})dt &= i\int_0^{2\pi} e^{it}\sin t dt \\ &= i\int_0^{2\pi} e^{it}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}dt \\ &= \frac{i}{2}\int_0^{2\pi}(e^{2it}+1)dt \\ &= \pi i \neq 0\end{aligned}$$

41: Come dice Guarneri il campo W non è conservativo. Se avesse primitiva, il campo W associato a tale primitiva sarebbe un potenziale per il W di $f(z)$, assurdo.

42: Risolto.

43: Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & 0 & \dots & -b^m \\ b & & b & b^2 & \dots & b^m \\ \hline & & & & & \\ & 1 & b & b^2 & \dots & 0 \end{array} \tag{2}$$

44: $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma dz' \frac{1}{z'-z}$

45: L'integranda avrebbe due poli, ma il cammino è una circonferenza centrata in $\sqrt{2}i$ e contiene solo $2i$. Pertanto con $f(z) = \sin z/(z+2i)$ abbiamo $\int_\gamma dz \frac{f(z)}{z-2i} = 2\pi i f(2i) = -i(\pi/4)\sinh 2$

46: Se $\gamma_a(t) = u(t) + iv(t)$ notiamo che $v = (1-u^2)/a$ e che quindi il cammino è il grafico di una parabola rivolta verso il basso, di vertice $(0, 1/a)$ e che interseca l'asse x in $x=-1, x=1$ (estremi del cammino). Sia $\rho(t) = t, -1 \leq t \leq 1$ il cammino che completa γ_a. Il cammino chiuso può contenere, dei poli di $f(z)$, al massimo i. Se è così si ha:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_a} dz f(z) &= \oint_{\gamma_a+\rho} dz f(z) - \int_\rho dz f(dz) \\ &= 2\pi i Res(f,i)? - \int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}dt \\ &= \pi ? - \frac{\pi}{2} \\ &= \pm\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

47: Calcoli assurdi, deve essere $\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Esce $\alpha = -1, \beta = 2$.

48: La formula di Cauchy per la derivata prima:

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dz' \frac{f(z')}{(z'-z)^2} \\
|f'(0)| = |i| = 1 &= \frac{1}{2\pi}|\oint_\gamma dz' \frac{f(z')}{z'^2}| \\
&\leq \frac{\ell(\gamma)}{2\pi}\max_{|z_0|=1/2}\frac{|f(z')|}{|z'|^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}2\pi}{2\pi}\frac{1}{\frac{1}{4}}\max_{|z'|=1/2}|f(z')| \\
&= 2\max_{|z_0|=1/2}|f(z_0)|
\end{aligned}
$$

49: $f(z)$ deve annullarsi in qualche punto, ma se si annullasse $|f(z)|$ sarebbe minimo perché il modulo al minimo fa 0. Quindi 0 è uno dei punti in cui si annulla.

50: Come il 48:

$$
\begin{aligned}
|f'(\frac{1}{2})| &\leq \frac{2\pi}{|2\pi i|}\max_{|z'|=1}\frac{|f(z')|}{|z'|^2} \\
&= \max_{B_1(0)}|f(z')|
\end{aligned}
$$

e le ipotesi darebbero $5 \leq 1$.

Mmmh controllare.

51: La funzione è analitica quindi ha i massimi sul bordo.

Tenendo conto che moltiplicare per una costante non cambia i massimi, e che $|e^{ix}| = 1 \, \forall x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
z &= i + e^{it} \\
\max_\gamma |e^{z^2}| &= \max_{[0,2\pi]}|e^{e^{2it}+2ie^{it}} - 1| \\
&= \max_{[0,2\pi]}|e^{\cos 2t + i\sin 2t}||e^{2i(\cos t + i \sin t)}| \\
&= \max_{[0,2\pi]}|e^{\cos 2t - 2\sin t}| \\
&= \max_{[0,2\pi]}|e^{1-2\sin^2 t - \sin t}|
\end{aligned}
$$

Il massimo di $1 - 2x^2 - 2x$ è $x = -1/2 = \sin t$ quindi $t = -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, z = i + e^{-i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}}, i + e^{-i\frac{5\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

Oppure, come ci ha insegnato Casini: $|e^{z^2}| = |e^{x^2-y^2}e^{2xyi}| = e^{x^2-y^2}$ ha i massimi di x^2-y^2, che è costante lungo iperboli equilatere, e in particolare positiva lungo iperboli equilatere di quelle a forma di)(. Quindi basta cercare l'iperbole di questo tipo tangente alla circonferenza di centro $(0,1)$ e raggio 1. I punti di intersezione vengono $e^{\pm i\frac{\pi}{6}}$.

52: $g(r) = re^{-r^2}$ ha un punto di massimo, impossibile se fosse (il modulo di) una funzione intera.

53: Nel linguaggio di Guarneri $L = \lim x_n$ ha la proprietà che x_n è definitivamente vicino a L, quindi sia definitivamente minore di ogni numero $\geq L$ che, condizione più forte della definizione di $\limsup$, definitivamente maggiore di ogni numero $\leq L$.

54:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n}(z-1)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\frac{z-1}{2})^n \\
\limsup a_n^{1/n} &= \frac{z-1}{2}, R = 2 \\
w &= \frac{z-1}{2} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} w^n &= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(-w)^n \\
&= -\log(1+(-w)) \\
&= -\log(1-\frac{z-1}{2})
\end{aligned}$$

in 0 fa $-\log\frac{3}{2} = \log\frac{2}{3}$.

55: DO

56: Provando un po' di volte si vede la ricorrenza $f^{(n)} = (-1)^n n!(z+2)^{(-3-n)}$. Il raggio di convergenza è la distanza dalla singolarità più vicina $|i-(-2)| = |i+2| = \sqrt{(}5)$.

57: Risolto.

58: Risolto.

59: La sua parte singolare è la stessa di quella regolare di e^z che è infinita.

60: $z = 1/\log c = 1/(\log|c| + 2k\pi i \arg c)$ ha $\mathbb{Z}$ soluzioni.

61: Sono le funzioni che hanno al massimo un polo in ∞ quindi quelle che hanno parte regolare finita, e quindi derivata definitivamente nulla, quindi i polinomi. Giusto?

62: Fa 0 sull'asse reale e $+\infty$ sull'asse immaginario quindi non esiste il limite.

63: Il limite non esiste manco sull'asse reale.

64: Risolto.

65: $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n(n+m)}(w/2)^2 = 0$.

66:

$$
\begin{aligned}
J_m = c_m = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dz\, e^{w(z-z^{-1})/2}\frac{1}{z^{(m+1)}}\\
= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} dt\, ie^{it}e^{iw\sin t}e^{-(m+1)it}\\
= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt\, e^{-imt}e^{iw\sin t}
\end{aligned}
$$

67: Con la 49 saranno un mucchio di calcoli inutili per calcolare i residui in $\pm e^{i\frac{\pi}{4}}, \pm e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Con la 50 basta vedere che ∞ è un punto regolare.

68:

$$
\begin{aligned}
\oint_\gamma dz\Big(\frac{z}{z-1}\Big)^n &= \oint_\gamma dz(1+\frac{1}{z-1})^n\\
&= \oint_\gamma dz\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{(z-1)^k}
\end{aligned}
$$

ma l'integrale di ciascun addendo è nullo tranne quando $k=1$ e $\binom{n}{1}=n$, così che l'integrale fa $n\oint_\gamma \frac{1}{z-1} = 2n\pi i$

69:

$$
\begin{aligned}
\gamma(t) =& e^{it}\\
\dot\gamma(t) =& i\gamma(t)\\
\int_0^{2\pi} dx\sin^{2n}(x) =& \int_0^{2\pi} dt\Big(\frac{\gamma(t)-\gamma^{-1}(t)}{2}\Big)^{2n}\frac{\dot\gamma(t)}{i\gamma(t)}\\
=& \frac{1}{2^{2n}i}\oint_\gamma dz\frac{1}{z}\Big(z-\frac{1}{z}\Big)^{2n}\\
\frac{1}{2^{2n}i}\oint_\gamma dz\frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}}
\end{aligned}
$$

La funzione integranda ha un polo di ordine $2n+1$ in $z=0$. Per calcolare il suo residuo usiamo la formula (7.14)

$$
\mathrm{Res}(f,0) = \frac{1}{(2n)!}\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}(z^2-1)^{2n+1}|_{z=0}
$$

Scrivendo il numeratore con il binomio di Newton e usando il fatto che nella derivata a-esima di un polinomio valutata in 0 sopravvive solo il termine che aveva esponente a, e si ha $\frac{d}{dz}z^a|_0 = a!$

$$
\begin{aligned}
(z^2+1)^{2n+1} =& \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^{2n+1-k} z^{2k} \\
\frac{d^{2n}}{dz^{2n}} (z^2-1)^{2n+1}|_{z=0} =& \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} \binom{2n+1}{n} (-1)^{2n+1-n} z^{2n}|_{z=0} \\
=& (-1)^{n+1} \binom{2n}{n} (2n)! \\
\mathrm{Res}(f,0) =& (-1)^{n+1} \binom{2n}{n} \\
I =& \frac{1}{4^n i} 2\pi i (-1)^{n+1} \binom{2n}{n} \\
=& \frac{2\pi}{4^n} \binom{2n}{n}
\end{aligned}
$$

Cioè dovrebbe fare così, il $-$ deve sparire quindi avrò sbagliato dei conti.

70: La funzione integranda soddisfa le ipotesi del lemma di Jordan, quindi l'integrale sull'asse reale è uguale all'integrale su una semicirconferenza chiusa nel semipiano superiore. La funzione ha due poli di ordine 1 nelle radici del denominatore, che sono $3 \pm i$. La curva che consideriamo concatena solo quella con parte immaginaria positiva. Pertanto

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ix}}{x^2-6x+10} =& \oint_\gamma dz \frac{e^i z}{z^2-6z+10} \\
=& 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, 3+i) \\
=& 2\pi i \frac{e^i z}{z-(3-i)}\Big|_{z=3+i} \\
=& 2\pi i \frac{e^i 3+i}{2i} \\
=& \pi e^{3i-1}
\end{aligned}
$$

71: Risolto?

72: DO

73: È $\frac{1}{1-z}$.

74: I domini sono connessi per archi quindi le classi di omotopia di cammini che partono da un punto sono in corrispondenza biunivoca con quelli che partono da un altro punto (componendoli con il cammino che connette i due punti).

75: Scegliendo la determinazione $\sqrt{1-z^2} = i\sqrt{z-1}\sqrt{z+1} = i|1-z^2| e^{i(\arg z-1)/2} e^{i(\arg z+1)/2}$ si ha che percorrendo γ_2 sia $\frac{\arg z-1}{2}$ che $\frac{\arg z+1}{2}$ aumentano di π, così che l'effetto totale è la moltiplicazione per $e^{2i\pi} = 1$.

76: La superficie è come quella di $\sqrt{z}$, ma $1+\sqrt{z}=0$ (equazione per trovare i poli) implica $z=(-1)^2$, ma sul foglio "di sopra" $\sqrt{1}=1$ e quindi il denominatore non si annulla mai.

77: I punti di diramazione nascono quando si annulla la roba sotto radice, ma per la stessa ragione del 76 sul foglio in cui $\sqrt{1}=1$ questo non succede.

78:

$$\lim_{\epsilon\to 0}|\int_{\gamma_\epsilon} dz \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}| \le \epsilon\frac{\epsilon^{\alpha-1}}{1+\epsilon} = \frac{e^{\alpha}}{1+\epsilon} \to 0$$
$$\lim_{R\to\infty}|\int_{\gamma_R} dz \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}| \le R\frac{R^{\alpha-1}}{1+R} = \frac{R^{\alpha}}{1+R} \to 0$$

79: Sì dopo copio come l'ha fatto Guarneri. DO

80: La funzione $f(x)=\ln(1+x)-x$ parte da 0 e decresce perché ha derivata negativa.

81: DO

82: Sì l'ha fatta Guarneri. DO

83: Basta dire che D è aperto?

84: DO

85: DO

86: DO

87: DO

88: DO

89: DO