Appunti di Haardt

danivolo

Problemi

Induzione magnetica

- L'induzione generata da un magnete in moto relativo con un conduttore compie lavoro o no a seconda del sistema di riferimento.

Esperimento di Michelson-Morley

- (l'apparato si muove verso sinistra):
- Il raggio che attraversa il beam splitter ha velocità c+v andando, c-v tornando
- Il raggio che viene riflesso percorre un triangolo.
- I due tempi di percorrenza sono quindi dilatati dal moto dell'apparato in modo diverso
- Girando l'apparato di 90° si ottiene uno spostamento nelle frange di interferenza che però sperimentalmente non c'è.

Postulati

Principi della relatività speciale

(i) Nessun esperimento può provare l'esistenza di una velocità assoluta

(ii) La velocità assoluta è la stessa in ogni sistema di riferimento

Sistema di riferimento inerziale

(1) La distanza tra due punti è indipendente dal tempo

(2) Gli orologi sono sincroni e corrono allo stesso rate

(3) La geometria è ad ogni tempo euclidea

Relazioni fra assi in diversi frame

- L'asse temporale di O' visto da O coincide con la sua worldline.
- Seguire la riflessione di un fotone permette di ricostruire l'asse x.

Intervallo

L'intervallo tra due eventi è invariante tra due sistemi di riferimenti

- sono infinitesimi dello stesso ordine
- quindi potrebbero al massimo differire di un fattore moltiplicativo
- che dipende solo dal modulo della velocità relativa, per omogeneità e isotropia dello spazio.
- Ma se considero le velocità relative tra tre sistemi vedo che ci dovrebbero essere termini che dipendono solo dal modulo uguali a termini che dipendono anche dalla direzione
- quindi l'unica soluzione è che questo fattore sia costante.

Un intervallo è spaziale se è positivo e viceversa

- Usando l'invarianza degli intervalli si può calcolare la dilatazione di un intervallo di tempo facendolo scorrere lungo l'iperbole.
- La dilatazione temporale è simmetrica: tutti i problemi nascono dal fatto che non esiste una simultaneità assoluta
- Il tempo proprio tra due eventi è il tempo misurato da un singolo orologio che passa tra due eventi, per il quale cioè l'intervallo non ha componente spaziale.

Trasformazioni di Lorenz

Boost in una direzione

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v \\ -\gamma v & \gamma \end{pmatrix}$$

Velocità relative

- io fermo che vedo un leone inseguire un'antilope tutto parallelo.
- Supponiamo che so w' aka la velocità dell'antilope secondo il leone
- Per trovare w basta differenziare la traformata di Lorenz inversa e usare che
$$\frac{dx'}{dt'} = w'$$
- Se l'antilope non si muove parallelamente al leone va bene lo stesso per la componente della sua velocità parallela
- La componente perpendicolare si fa lo stesso gioco
- Il risultato finale parla delle componenti della velocità vista da me in termini delle componenti della velocità viste dal leone

Angoli

- Facendo il rapporto fra le componenti nel mio sistema di riferimento ottengo la tangente dell'angolo che forma l'antilope nel mio rispetto a quello del leone
- Se metto $v = 1$ ottengo le formule per l'aberrazione della luce
- Se da queste ottengo il seno e il coseno posso considerare a cosa corrispondono per me gli angoli $\pm 90^\circ$ del leone
- Si trova che se il leone emette radiazione isotropicamente antilopi io le vedo inconate

Effetto doppler

- di base la frequenza vera si divide per $1 - v$ incidente
- essendo una frequenza si contrae come una lunghezza di un fattore γ

Accelerazioni

- literalli differenzi le formule per la velocità e dividi per dt
- L'MCRF è il sistema di riferimento in cui, in quell'istante, la particella è ferma quindi $w' = 0$
- Una particella è uniformemente accelerata se lo è nell'MCRF

Paradossi

Paradosso dei gemelli

- la simmetria si ha prima e dopo che il gemello in viaggio cambi direzione
- Cambiando direzione cambia l'evento simultaneo a lui sulla terra e passano istantaneamente altri 46 anni
- Il viaggiatore per tracciare l'età del gemello terrestre deve mandare copie di se stesso prima e dopo, e vedere alla fine di tutti i viaggi i diari di queste copie.
- Vedrebbe che l'ultimo di quelli dopo di lui ha registrato 2 anni sulla terra mentre il primo di quelli prima di lui ha registrato 48 anni.
- Questo non è un paradosso perché per queste sue copie è impossibile coprire tutto lo spazio tempo della terra.

Paradosso del garage

- bus di $20m$ a $0.8c$ in box di $15m$
- Nel sistema del portinaio prima il bus entra e poi si schianta
- Nel sistema del conducente prima si schianta e poi entra per bene
- L'intervallo fra i due eventi è lo stesso ed è di tipo spazio quindi i due eventi sono causalmente disconnessi e possono apparire in tutti e due gli ordini
- Morale: la lunghezza percepita contratta è la lunghezza massima che potrebbe avere l'autobus se si schiantasse.

Dinamica

Quantità dinamiche

- il momento si dilata essendo duale alla lunghezza
- L'energia cinetica si ricava sapendo che la potenza è forza per velocità $= m(\gamma - 1)$
- L'energia totale è γm dove m è l'energia di massa
- Moralmente il fattore γ che dilata e contrae è l'energia di un corpo
- Da $E = \gamma m$ e $p = m\gamma v$ salta fuori che $E^2 = p^2 + m^2$ che per i fotoni vuol dire $E = p$

Campo elettromagnetico

- l'energia totale di una particella carica è $m\gamma + e\phi$
- Una particella in un campo elettrico costante si muove di moto uniformemente accelerato
- In un campo magnetico costante e uniforme la frequenza di ciclotrone viene contratta di un fattore γ

Potenziale centrale

- il momento angolare si conserva per simmetria quindi il moto è in un piano
- energia: $\gamma m + V$
- $v = \dot{\rho}\rho + \rho\dot{\varphi}\varphi$
- $v^2 = \dot{\varphi}^2(\rho^2 + R^2)$ dove $R = d\rho/d\varphi$
- $L = m\rho^2\dot{\varphi}\gamma$
- sostituisci nell'energia $\gamma = \sqrt{1 + \gamma^2 v^2}$
- sostituisci φ con L
- esplicita $\frac{dr}{d\varphi}$
- sostituzione $u = 1/r$
- deriva in $d\varphi$
- si ottiene
$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \alpha/L^2(E + \alpha u)$$
- sì roba insomma

Trasformazioni dei fattori gamma

- $\gamma'_w = (1 - wv)\gamma_v\gamma_w$
- da questo si trova che p_x ed E si trasformano come x e t mediante traformazioni di Lorenz
- Salta fuori che la massa a riposo è un invariante relativistico
- Si può calcolare le trasformazioni della forza come derivata del momento

Matematica

Momento

- La 4-velocità di una particella è il vettore base e'_0 nell'MCRF
- Il 4-momento $p = mu$
- Conservazione del 4-momenti: si inserisce anche la massa a riposo delle particelle
- Il sistema del centro del momento è il sistema in cui il 4-momento ha coordinate $(E, 0, 0, 0)$

Grandezza

- i vettori nulli hanno norma 0
- il vettore velocità ha norma -1 in quanto nell'MCRF è e'_0
- Ogni particella di massa nulla ha quadrimomento nullo

Tempo proprio

- Il tempo proprio $d\tau^2 = -dx^2$
- $dx/d\tau$ è tangente alla WL essendo un multiplo di dx e ha modulo -1
- quindi è la 4-velocità
- la 4-accelerazione è $du/d\tau$ ed è sempre ortogonale a u
- Nell'MCRF $p' \cdot e'_0 = E'$ e il prodotto è invariante
- quindi per chiunque $E = p \cdot u$

Energia di un fotone cambiando sistema di riferimento $h\nu' = E' = \gamma h\nu(1 - v)$ che è l'effetto doppler

Scattering compton

- urto elastico tra fotone di energia E_0 ed elettrone a riposo
- $p_{\gamma 0} + p_{e0} = p_{\gamma 1} + p_{e1}$
- i momenti sono

$$
\begin{aligned}
p_{\gamma_0} &= (E_0, E_0\mathbf{n}) \\
p_{\gamma_1} &= (E_1, E_1\mathbf{n}) \\
p_{e0} &= (m, 0) \\
p_{e1} &= (m\gamma, \mathbf{P})
\end{aligned}
$$

- facendo la grandezza si ottiene
$$E_1 = \frac{E_0}{1 + \frac{E_0}{m}(1 - \cos\theta)}$$
- l'ha fatto lo scattering compton con elettrone in movimento?

Polvere

- Insieme di particelle a riposo in qualche sistema inerziale
- La densità numerica n nell'MCRF diventa γn per contrazione di una sola lunghezza
- Il flusso nv diventa γnv, ovvero il 4-flusso è $N = nu$
- La sua lunghezza è n a meno di qualche segno
- La densità delle particelle pertanto può essere vista come il flusso attraverso un segmento unitario di tempo
- Se le particelle hanno massa a riposo m la densità di energia è $\rho = En = mn$
- Pertanto $\rho' = \gamma^2\rho$ non è un tensore di rango 1

Tensore energia-momento

- La densità di energia è una componente del tensore $T^{\alpha\beta}$ le cui componenti sono il flusso del momento α attraverso la superficie unitaria perpendicolare a x^β
  - T^{00} è il flusso di energia perpendicolare al tempo aka la densità di energia
  - T^{0i} è il flusso di energia perpendicolare a x^i
  - T^{i0} è il flusso del momento i perpendicolare al tempo, aka densità di momento
  - T^{ij} è il flusso del momento i perpendicolare a x^j
- È simmetrico perché

$$\begin{aligned}\text{flusso di energia} &= \text{densità di energia per velocità} \\ &= \text{densità di massa per velocità} \\ &= \text{densità di momento}\end{aligned}$$

- Per la polvere nell'MCRF l'unica componente non nulla è $T^{00} = \rho = mn$
- In generale $T^{\alpha\beta} = \rho u^\alpha u^\beta$
- Trasforma come

$$\begin{aligned}T^{00} &= \rho\gamma^2 \\ T^{0i} &= \rho\gamma^2 v^i \\ T^{i0} &= \rho\gamma^2 v^i \\ T^{ij} &= \rho\gamma^2 v^i v^j\end{aligned}$$

- Per un fluido con moti random bisogna tener conto di pressione, viscosità, conduzione di calore, ma T è sempre simmetrico
- Quando viscosità e conduzione sono trascurabili $T = \mathrm{diag}(\rho, p_x, p_y, p_z)$
- La conservazione dell'energia e del momento si può scrivere come

$$T^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0$$

1 Elettrodinamica

Corrente

- Il 4-volume $d\mathbf{V} = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ è invariante perché la dilatazione cancella la contrazione
- Il 3-volume dV trasforma come x
- La carica è invariante
- Quindi la densità di carica $\rho = de/dV$ trasforma come t
- Definiamo $J^\mu = (\rho, J^x, J^y, J^z)$ 4-corrente
- Abbiamo l'equazione di continuità

$$J^\mu_{,\mu} = 0$$

Equazione delle onde

- Definiamo il 4-potenziale (ϕ, A^x, A^y, A^z)
- Il gauge di Lorenz è
$$A^{\alpha}_{,\alpha}$$
- Le equazioni di Maxwell nel gauge di Lorentz sono
$$A^{\beta,\alpha}_{,\alpha} = -4\pi J^{\beta}$$

Tensore elettromagnetico

- Le componenti dei campi stanno nella curvatura della connessione A_{mu}
$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$$
- Le sue componenti in forma covariante sono
$$\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$
- Le equazioni di Maxwell in cui non compaiono sorgenti, cioè
$$\nabla \cdot B = 0 \tag{1.0.1}$$
$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \tag{1.0.2}$$
possono essere riscritte in una specie di identità di Bianchi
$$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\sigma\mu,\nu} + F_{\nu\sigma,\mu} = 0$$

Trasformazioni dei campi

- Il tensore elettromagnetico è 2-covariante e trasforma secondo
$$F_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\alpha}_{\mu'}\Lambda^{\beta}_{\nu'}F_{\alpha\beta}$$
- La diagonale è nulla in ogni sistema di riferimento
- Le componenti parallele dei campi alla velocità sono invarianti
- Le componenti perpendicolari dei campi vanno come
$$\begin{aligned} E_{y'} &= \gamma E_y - \gamma v B_z \\ E_{z'} &= \gamma E_z + \gamma v B_y \\ B_{y'} &= \gamma B_y + \gamma v E_z \\ B_{z'} &= \gamma B_z - \gamma v E_y \end{aligned}$$
- Vettorialmente
$$E'_{\perp} = \gamma(E_{\perp} + v \times B) B'_{\perp} = \gamma(B_{\perp} - v \times E)$$

Scalari invarianti

- $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2)$
- $\det F = (E \cdot B)^2$

Campo di una carica in moto uniforme

- Nel sistema della carica q il campo E vale

$$
\begin{aligned}
E'_x &= \frac{qx'}{r'^3} \\
E'_y &= \frac{qy'}{r'^3} \\
E'_z &= \frac{qz'}{r'^3} \\
B'_x &= B'_y = B'_z = 0
\end{aligned}
$$

- Nel sistema dell'osservatore questo diventa

$$
\begin{aligned}
E'_x &= E_x = \frac{qx'}{r'^3} \\
E'_y &= \frac{\gamma qy'}{r'^3} \\
E'_z &= \frac{\gamma qz'}{r'^3} \\
B'_x &= B_x = 0 \\
B'_y &= -\frac{\gamma vqz'}{r'^3} \\
B'_z &= \frac{\gamma vqy'}{r'^3}
\end{aligned}
$$

- Usando le trasformate di Lorenz

$$
\begin{aligned}
E'_x &== \frac{\gamma q(x - vt)}{r'^3} \\
E'_y &= \frac{\gamma qy}{r^3} \\
E'_z &= \frac{\gamma qz}{r^3} \\
B'_x &= 0 \\
B'_y &= -\frac{\gamma vqz}{r^3} \\
B'_z &= \frac{\gamma vqy}{r^3}
\end{aligned}
$$

  con $r = \sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2}$

- Questi sono i campi di velocità dei potenziali di Leinard-Wiechart.

- Se vogliamo il campo in $P = (0, p, 0)$ della particella che si muove di moto uniforme lungo l'asse x

$$
\begin{aligned}
E'_x &= -\frac{\gamma v t q}{(\gamma^2 v^2 t^2 + b^2)^{3/2}} \\
E'_y &= \frac{\gamma q b}{(\gamma^2 v^2 t^2 + b^2)} \\
E'_z &= 0 \\
B'_x &= 0 \\
B'_y &= 0 \\
B'_z &= \frac{\gamma v q b}{(\gamma^2 v^2 t^2 + b^2)}
\end{aligned}
$$

- $B_z(P) = vE_y(P)$
- Il campo elettrico si trova nel piano comune ed è diretto lungo la congiungente fra la carica e il punto
- Il campo magnetico è perpendicolare al campo elettrico

Spettro del campo di radiazione

- Usando che la componente x del campo elettrico è trascurabile:

$$
\begin{aligned}
\hat{E}(\omega) \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} E_y(t) e^{i\omega t} dt &= \frac{q\gamma b}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (\gamma^2 v^2 t^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}} e^{i\omega t} dt \\
&= \frac{q\omega}{\pi\gamma v^2} K_1\left(\frac{b\omega}{\gamma v}\right)
\end{aligned}
$$

  usando la funzione di Bessel modificata del primo ordine.

- Lo spttro dell'impulso è quindi

$$
\frac{dW}{dAdt} = |\hat{E}(\omega)|^2 = \frac{q^2\omega^2}{\pi^2\gamma^2 v^4} K_1^2\left(\frac{b\omega}{\gamma v}\right)
$$

4-forza di Lorenz

- $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + v \times \mathbf{B})$ diventa $F^\mu = qF^{mu}_{nu} u^{nu}$
- Le equazioni del moto diventano

$$
\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} &= q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \\
\frac{dp_i}{dt} &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_i
\end{aligned}
$$

- Sono sempre le stesse, e questo ci dice che la forza di Lorenz è già relativisticamente invariante

2 Radiazione da cariche relativistiche

Potenza totale

- Carica in moto lungo x che emette radiazione isotropicamente
- Nell'MCRF il 3-momento totale della radiazione è nullo

- Il 4-momento totale è costituito quindi interamente dall'energia
- L'energia è la componente temporale del 4-momento e quindi cambiando sistema di riferimento si dilata
- Ma il tempo si dilata dello stesso fattore, quindi la potenza è invariante
- $u \cdot a = -u^0 a^0 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} 0$,
- ma nell'MCRF $\mathbf{a} = 0$ e quindi $a^0 = 0$ in ogni sistema di riferimento
- Quindi la grandezza della 4-accelerazione è la norma della 3-accelerazione
- La formula di Larmor
$$P = \frac{2q^2}{3} a \cdot a = \frac{2q^2}{3} \gamma^4 (\gamma^2 a_\parallel^2 + a_\perp^2)$$
- Anche se c'è davanti un fattore γ^2 all'accelerazione parallela bisogna tenere conto che di solito le particelle si accelerano in moto circolare, quindi vince il contributo perpendicolare.

Distribuzione angolare

- Radiazione emessa in un angolo solido $d\Omega' = d\phi' d\mu'$ con $\mu' = \cos\theta'$con θ' angolo rispetto all'asse x.
- Il momento totale in un andolo solito non è nullo e trasforma come
$$p^0 = \gamma p'^0 + \gamma v p'^1$$
- Per un fotone $p'^1 = p'^0 \cos\theta = p'^0 \mu'$ perciò
$$dW = \gamma(1 + v\mu') dW'$$
- Trasformiamo μ' usando le leggi degli angoli, mentre $\phi = \phi'$ perché è perpendicolare al moto
$$d\mu = \frac{d\mu'}{\gamma^2(1 + v\mu')^2}$$
$$d\phi = \phi'$$
- Da cui
$$d\Omega = \frac{d\Omega'}{\gamma^2(1 + v\mu')^2}$$
- L'energia per angolo solido è
$$\frac{dW}{d\Omega} = \gamma^3 (1 + v\mu')^3 \frac{dW'}{d\Omega'}$$

Potenza

- Nell'MCRF $\mathcal{O}'$
$$P' = \frac{dW'}{dt'}$$
- Nel sistema $\mathcal{O}$ abbiamo due scelte possibili
  - $dt = \gamma dt'$ che dà la potenza emessa
  - $dt_A = \gamma(1 - v\mu) dt$ che tiene conto dell'effetto Doppler e dà la potenza ricevuta

- Poiché conta solo la potenza misurata da qualcuno consideriamo il secondo modo:
$$\frac{dP_r}{d\Omega} = \gamma^4(1+v\mu')^4\frac{dP'}{d\Omega'} = \frac{1}{\gamma^4(1-v\mu)^4}\frac{dP'}{d\Omega'}$$
- Al secondo ordine $\mu \approx 1-\theta^2$ quindi
$$v \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$$
e
$$\frac{dP_r}{d\Omega} \approx \left(\frac{2\gamma}{1+\gamma^2\theta^2}\right)^4 \frac{dP'}{d\Omega'}$$

Lagrangiana

- L'azione ha componente libera
$$-m\int_a^b \sqrt{1-\dot{x}^2}dt$$
e di interazione
$$q\int_a^b dx^\mu A_\mu$$
- La lagrangiana è
$$-m\sqrt{1-\dot{x}^2} + q(A_0 + \dot{x}^i A_i)$$
- Le Eulero-Lagrange danno
$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = q\frac{dx^\mu}{d\tau}F_{\nu,\mu}$$