Appunti di Prati

danivolo

Contents

1 Oscillazioni easy

1.1 Pendoli

1.1.1 Pendolo semplice

L'equazione del moto di un pendolo easy è

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta \tag{1.1.1}$$

che per piccole oscillazioni si riduce a

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta \tag{1.1.2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{1.1.3}$$

$$x(t) = x_m\cos(\omega_0 t + \alpha) \tag{1.1.4}$$

Il periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\sqrt{L}$, in questo limite, non dipende da x_m, né, sulla Terra, da g.

Per ottenere un'approssimazione migliore per il periodo riduciamo l'equazione alle quadrature credo che si dica. Confrontando energia in basso e agli estremi:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + 2mgL\sin^2\frac{\phi}{2} = 2mgL\sin^2\frac{\phi_m}{2} \tag{1.1.5}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{L}v = 2\omega_0\sqrt{\sin^2\frac{\phi_m}{2} - \sin^2\frac{\phi}{2}} \tag{1.1.6}$$

$$\omega_0 dt = \frac{d\phi}{2\sqrt{\sin^2\frac{\phi_m}{2} - \sin^2\frac{\phi}{2}}} \tag{1.1.7}$$

Integrando l'ultima equazione su $(-\phi_m, \phi_m)$ otteniamo $\omega_0 T$. Per calcolare l'integrale si usa la sostituzione

$$\sin\frac{\phi}{2} = \sin\frac{\phi_m}{2}\sin\beta \tag{1.1.8}$$

$$T = \frac{2}{\omega_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\phi_m}{2}\sin^2\beta}} \tag{1.1.9}$$

che è un integrale ellittico di prima specie, quindi approssimiamo al primo ordine in ϕ_m:

$$T \sim \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 + \frac{\phi_m^2}{16}\right) \tag{1.1.10}$$

$$\omega \sim \omega_0\left(1 - \frac{\phi_m^2}{16}\right) \tag{1.1.11}$$

L'integrale si risolve esattamente solo se il pendolo parte in posizione verticale, e guarda te, il periodo è infinito.

1.1.2 Oscillatore forzato

L'equazione diventa inomogenea:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}\cos\omega t \tag{1.1.12}$$

La soluzione dell'omogenea è il solito pendolo, la soluzione particolare è

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t) \tag{1.1.13}$$

$$= \frac{F_0/m}{\bar{\omega}\Delta\omega}\sin\left(\frac{\Delta w}{2}t\right)\sin(\bar{\omega}t) \tag{1.1.14}$$

che fa i battimenti e per $\omega = \omega_0$ esplode, cioè il seno di $\Delta\omega$ si semplifica col suo argomento e l'*envelope* cresce linearmente col tempo.

Si può riscrivere la soluzione particolare mettendo il modulo al denominatore e introducento uno sfasamento che compensi il cambio di segno quando ω passa da un lato all'altro di ω_0. In questo caso si ottiene il secondo problema oltre alla divergenza, cioè che questo sfasamento è discontinuo, ma introducendo l'attrito tutto si aggiusta.

1.1.3 Oscillatore smorzato

Introduciamo una forza di attrito proporzionale alla velocità, come succede per moti lenti in mezzo denso. Per moti veloci in mezzo poco denso l'attrito dipende dal quadrato della velocità.

$$F_a = -b\dot{x} \tag{1.1.15}$$

$$\gamma = \frac{b}{2m} \tag{1.1.16}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + w_0^2 x = \frac{F_0}{m} cos\omega t \tag{1.1.17}$$

Le soluzioni dell'omogenea partendo da 0 a velocità v_0 vengono

$$x(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t} \tag{1.1.18}$$

$$\lambda_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \Gamma \pm \gamma \tag{1.1.19}$$

$$x(t) = \frac{v_0}{\lambda_+ - \lambda_-}(e^{\lambda_+ t} + e^{\lambda_- t}) \tag{1.1.20}$$

$$= \begin{cases} \frac{v_0 e^{-\gamma t}}{\Gamma} \sinh \Gamma t & (\gamma > \omega_0) \\ v_0 t e^{-\gamma t} & (\gamma = \omega_0) \\ \frac{v_0 e^{-\gamma t}}{i\Gamma} \sin i\Gamma t & (\gamma < \omega_0) \end{cases} \tag{1.1.21}$$

Per il caso sovrasmorzato il moto è unimodale e l'ampiezza massima si raggiunge in

$$t_m = \frac{1}{\Gamma}\text{arctanh}\frac{\Gamma}{\gamma} \tag{1.1.22}$$

e il tempo minimo si ha per lo smorzamento critico, quando vale $1/\gamma$, quindi se vuoi che una porta aperta si chiuda veloce sai come fare.

Nel caso sottosmorzato sono oscillazioni smorzate con pseudo-periodo uguale a quello dell'oscillatore libero.

Per la soluzione dell'inomogenea facciamo come Landau e cerchiamo una soluzione all'equazione complessa per poi prenderne la parte reale:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + w_0^2 x = \frac{F_0}{m}\Re e^{i\omega t} \tag{1.1.23}$$

$$x(t) = \Re B e^{i\omega t} = C\cos(\omega t - \delta) \tag{1.1.24}$$

$$B = Ce^{-i\delta} = \frac{F_0/m}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}} \tag{1.1.25}$$

$$C = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \tag{1.1.26}$$

$$\delta = \arctan\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{1.1.27}$$

Ora infatti C non ha divergenze e δ è continuo.

Dal grafico di C notiamo che l'ampiezza in risonanzaè $C(\omega_0) = \omega_0/2\gamma C(0) = QC(0)$, ma non è quella massima, che si ottiene per $\omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$.

Ah comunque Q sarebbe il fattore di qualità, si chiama così perché l'energia di un oscillatore smorzato decade con esponente $2\pi/Q$ e quindi un oscillatore di qualità perde molta poca energia in un periodo.

Vicino alla risonanza possiamo prendere

$$\gamma \ll \omega_0 \tag{1.1.28}$$

$$\omega_m = \omega_0 \tag{1.1.29}$$

$$|\omega - \omega_0| = \gamma \tag{1.1.30}$$

$$C(\omega) = \frac{F_0/2k}{\sqrt{(\frac{\omega}{\omega_0} - 1)^2 + \frac{1}{4Q^2}}} \tag{1.1.31}$$

Ora $b = C^2$ è effettivamente una Lorenziana, simmetrica rispetto a ω_0. Poiché

$$C\Big(\omega_0 \pm \frac{\omega_0}{Q}\Big) = \frac{C(\omega_0)}{\sqrt{2}} \tag{1.1.32}$$

possiamo dire che la FWHM è inversamente proporzionale al fattore di qualità.

Sia per l'oscillatore libero che per l'oscillatore forzato e smorzato, l'energia cinetica media è uguale all'energia potenziale media.

Nell'oscillatore forzato e smorzato l'energia media su un periodo è costante anche se ci sono 3 forze, perché il lavoro della forzante compensa esattamente il lavoro della forza d'attrito.

1.2 Pendoli accoppiati

1.2.1 Da una molla

Tieni conto che anche due pendoli senza una molla sono comunque accoppiati dall'aria, non serve chissà che cosa.

Per prima cosa bisogna si approssima $\sin\theta$ con $\tan\theta$ per parlare degli spostamenti orizzontali, come due cubetti di ghiaccio legati da una molla.

Le equazioni del moto hanno forze proporzionali a $x_1 - x_2$, e si disaccoppiano passando alle variabili somma e differenza, insomma ruotando tutto di 45°. Si trova così che un sistema di N oscillatori accoppiati si scompone sempre in combinazioni di N modi normali, tra i quali non c'è scambio di energia.

1.2.2 Pendolo doppio

Per scrivere le equazioni del moto trascureremo la forza centrifuga, perché dipendendo dalla velocità al quadrato, che nel pendolo semplice è al massimo $(\omega_0\theta_m)^2$ (confronto fra energie), quindi nel limite delle piccole oscillazioni sempre un infinitesimo del II ordine. Senza la forza centrifuga la tensione del filo è $mg\cos\theta \sim mg$.

Per scrivere le equazioni del moto bisogna fare un disegno che sembra complicato ma non lo è per convincersi del fatto che $y = L(\alpha + \beta)$ e che la forza esercitata dal secondo pendolo sul primo è proporzionale a $\sin\beta - \alpha$.

Si scrivono le equazioni in termini del rapporto $r = m/M$ che poi faremo tendere a 0:

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + 2r)x = r\omega_0^2 y \tag{1.2.1}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 x \tag{1.2.2}$$

Cercando soluzioni con la stessa frequenza e fase, o comunque provando a diagonalizzare, si trova:

$$\omega_\pm = \omega_0\sqrt{1 + r \pm \sqrt{r(1 + r)}} \tag{1.2.3}$$

che sono valori esterni alle frequenze naturali dei pendoli $\omega_0 0$, $\omega_0\sqrt{1 + 2r}$.

Considerando ora la seconda massa molto più piccola della prima, e considerando nelle frequenze solo i termini fino a $\sqrt{r}$ si ha

$$\omega_\pm = \omega_0\Big(1 \pm \frac{\sqrt{r}}{2}\Big) \tag{1.2.4}$$

Le equazioni approssimate sono

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = r\omega_0^2 y \tag{1.2.5}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 x \tag{1.2.6}$$

e si disaccoppiano anche a occhio combinando la prima con la seconda moltiplicata per $\sqrt{r}$.

1.3 Pendolo di Kapitza

1.3.1 Verticale

Partendo dalle coordinate

$$\begin{cases} x &= L\sin\theta \\ y &= -L\cos\theta + a\cos\Omega t \end{cases} \tag{1.3.1}$$

si trova l'equazione tipo Mathieu

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2(1 - A\cos\Omega t)\sin\theta = 0 \tag{1.3.2}$$

$$A = \frac{a}{L}\frac{\Omega^2}{\omega^2} \tag{1.3.3}$$

dove ricordiamo che $a \ll L$, $\Omega \gg \omega$, così che $A \sim \epsilon^{-1}$ è piuttosto grande.

Secondo Kapitza, cerchiamo una soluzione composta da una componente ampie e lenta e una piccola e veloce. Nell'equazione che si ottiene separiamo i termini veloci, cioè che muoiono mediando su un periodo veloce, da quelli lenti, che sopravvivono:

$$\ddot{\theta_0} + \omega_0^2\sin\theta_0 - \omega_0^2 A\cos\theta_0 cos(\Omega t)\theta_1 \tag{1.3.4}$$

$$+\ddot{\theta_1} + \omega_0^2\cos\theta_0\theta_1 - \omega_0^2 A\sin\theta_0\cos(\Omega t) = 0 \tag{1.3.5}$$

Mediando su un periodo si ottiene l'equazione per θ_0 in termini di θ_1, che invece si trova ponendo uguali a 0 i termini veloci. L'equazione per θ_1 è quella di un oscillatore forzato:

$$\theta_1(t) = \frac{\omega_0^2 A\sin\theta_0}{\omega_0^2\cos\theta_0 - \Omega^2}\cos(\Omega t) \tag{1.3.6}$$

$$\tag{1.3.7}$$

Inserendolo nell'equazione per θ_0 possiamo tornare a $\theta_0 \to \theta$:

$$\ddot{\theta_0} + \omega_0^2\sin\theta_0 - \langle\omega_0^2 A\cos\theta_0\cos(\Omega t)\theta_1\rangle \tag{1.3.8}$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin\theta(1 + 2B\cos\theta) = 0 \tag{1.3.9}$$

$$B = \left(\frac{1}{2}\frac{\Omega}{\omega}\frac{a}{L}\right)^2 \tag{1.3.10}$$

Da quest'equazione possiamo ricavare il potenziale efficace a cui è soggetto l'oscillatore, di cui ci interessano solo le derivate

$$\frac{dV}{d\theta} = \omega_0^2 \sin\theta(1 + 2B\cos\theta) \tag{1.3.11}$$
$$\frac{d^2V}{d\theta^2}\omega_0^2 \cos\theta(1 + 2B\cos\theta) - 2B\omega_0^2 \sin^2\theta \tag{1.3.12}$$

I punti di equilibrio annullano la derivata prima e sono 0, π, e, quando $B > 1/2$, $\bar{\theta} = \pm \arccos(-1/2B)$

Calcolando valutando la derivata seconda del potenziale in questi punti si ottiene che:

- $\theta = 0$ è sempre stabile
- $\theta = \pi$ è stabile se $B > 1/2$
- $\theta = \pm\bar{\theta}$ sono sempre instabili

Da notare che $B_{critico}$ corrisponde a $a\Omega = \sqrt{2gL}$, cioè che la velocità massima nell'oscillazione del perno del pendolo sia uguale alla velocità massima di un grave che cade da altezza L.

1.3.2 Orizzontale

Il termine oscillante va sulla x e l'equazione diventa:

$$\ddot{\theta} + \omega_0(\sin\theta - A\cos(\Omega t)\cos\theta) = 0 \tag{1.3.13}$$

Usando la stessa tecnica si ottiene

$$\ddot{\theta}_0 + \omega_0^2 \sin\theta_0 + \omega_0^2 A \sin\theta_0 \cos(\Omega t)\theta_1 \tag{1.3.14}$$
$$+\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2 \cos\theta_0\theta_1 - \omega_0^2 A\cos(\Omega t)\cos\theta_0\theta_0 \tag{1.3.15}$$
$$\theta_1 = \frac{\omega_0^2 A\cos\theta_0}{\omega_0^2\cos\theta_0 - \Omega^2}\cos(\Omega t) \tag{1.3.16}$$
$$\ddot{\theta}_0 + \omega_0^2 \sin\theta_0 + \omega_0^2 A\sin\theta_0 < \cos(\Omega t)\theta_1 > \tag{1.3.17}$$
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta(1 - 2B\cos\theta) \tag{1.3.18}$$

In questo caso:

- $\theta = 0$ è stabile sse $B < 1/2$
- $\theta = \pi$ è sempre instabile
- $\theta = \pm\bar{\theta}$ sono sempre stabili, quando esistono

1.4 Pendolo invertito che torna nella posizione iniziale

L'equazione del pendolo si può integrare esattamente una volta:

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta \tag{1.4.1}$$

$$\dot{\theta} = 2\omega_0 \cos\frac{\theta}{2} \tag{1.4.2}$$

Questo però fissa i punti di inversione in $\pm\pi$.
Per integrare la seconda volta è utile la sostituzione

$$\theta = 4\arctan y - \pi \tag{1.4.3}$$

$$\dot{\theta} = \frac{4y}{1+y^2} \tag{1.4.4}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{2y}{1+y^2} \tag{1.4.5}$$

$$\dot{y} = \omega_0 y \tag{1.4.6}$$

$$\theta = 4\arctan(e^{\omega_0 t}) - \pi \tag{1.4.7}$$

Più interessante è

$$\dot{\theta} = 2\omega_0\,\mathrm{sech}(\omega_0 t) \tag{1.4.8}$$

che è tipo un solitone, boh.
Qui $\dot{\theta}_m = 2\omega_0$, come nelle piccole oscillazioni, nel limite $\pi \to 2$.

1.5 Risonanza parametrica

1.5.1 2:1, I ordine

Equazione di Mathieu:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2(1 + 2\epsilon\cos(\Omega t)) = 0 \tag{1.5.1}$$

Questo perché quando hai un oscillatore con m e k variabili lo puoi comunque riscrivere in questa forma con la sostituzione $d\tau = dt/dm$.

Cerchiamo una soluzione tipo oscillatore armonico ma con ampiezza lentamente variabile nel tempo:

$$\theta = Ae^{i\omega t} + A^*e^{-i\omega t} \tag{1.5.2}$$

$$\ddot{A} \ll \omega\dot{A} \ll \omega^2 A \tag{1.5.3}$$

$$\ddot{\theta} = (\ddot{A} + 2i\omega\dot{A} - \omega^2 A)e^{i\omega t} \tag{1.5.4}$$

$$+(\ddot{A}^* - 2i\omega\dot{A}^* - \omega^2 A^*)e^{-i\omega t} \tag{1.5.5}$$

L'equazione di Mathieu diventa:

$$[2i\omega\dot{A} + (\omega_0^2 - \omega^2)A]e^{i\omega t} \tag{1.5.6}$$
$$+[-2i\omega\dot{A}^* + (\omega_0^2 - \omega^2)A^*]e^{-i\omega t} \tag{1.5.7}$$
$$+\omega_0\epsilon[A(e^{i(\omega+\Omega)t} + e^{i(\omega-\Omega)t}) \tag{1.5.8}$$
$$+A^*(e^{-i(\omega+\Omega)t} + e^{-i(\omega-\Omega)t})] = 0 \tag{1.5.9}$$

Qui scegliamo $\Omega = 2\omega$, così che si creano termini di frequenza ω, che tengo, e 3ω, che butto via.

$$2i\omega\dot{A} + (\omega_0^2 - \omega^2)A + \omega_0^2 A^* = 0 \tag{1.5.10}$$
$$-2i\omega\dot{A}^* + (\omega_0^2 - \omega^2)A^* + \omega_0^2 A = 0 \tag{1.5.11}$$

Supponiamo inoltre che $\omega = \omega_0 + \delta/2$, così che $\omega_0^2 - \omega^2 = \delta\omega$, e diviamo per ω_0:

$$-\delta A + 2i\dot{A} + \epsilon\omega_0 A^* = 0 \tag{1.5.12}$$
$$-\delta A^* + -2i\dot{A}^* + \epsilon\omega_0 A = 0 \tag{1.5.13}$$

Secondo la teoria di Floquet possiamo cercare soluzioni $A = ae^{\gamma t}$. L'equazione diventa:

$$(-\delta + 2i\gamma)A + \epsilon\omega_0 A^* = 0 \tag{1.5.14}$$
$$\epsilon\omega_0 A + (-\delta - 2i\gamma)A^* = 0 \tag{1.5.15}$$

Il sistema ha soluzioni non banali solo se il determinante della matrice associata è nullo:

$$\delta^2 + 4\gamma^2 = \epsilon^2\omega_0^2 \tag{1.5.16}$$
$$\gamma^2 = \frac{\epsilon^2\omega_0^2 - \delta^2}{4} > 0 \tag{1.5.17}$$
$$|\delta| < \epsilon\omega_0 \tag{1.5.18}$$

Pertando la condizione per la risonanza è

$$\left|\frac{\Omega}{\omega} - 2\right| < \epsilon \tag{1.5.19}$$

1.5.2 2:1, ordine II

Per ottenere la condizione di risonanza si può anche porre le ampiezze costanti, però si possono aggiungere armonici per migliorare l'approssimazione. Prendiamo

$$\theta = Ae^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t} + Be^{3i\omega t} + B^* e^{3i\omega t} \tag{1.5.20}$$
$$\ddot{\theta} = -\omega^2 e^{i\omega t} - \omega^2 A^* e^{-i\omega t} - 4\omega^2 Be^{3i\omega t} - 4\omega^2 B^* e^{3i\omega t} \tag{1.5.21}$$

Il sistema di equazioni che si ottiene buttando via i termini che oscillano come $5w$ otteniamo:

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)A + \omega_0^2\epsilon(A^* + B) & = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)A^* + \omega_0^2\epsilon(A + B^*) & = 0 \\ (\omega_0^2 - 9\omega^2)B + \omega_0^2\epsilon A & = 0 \\ (\omega_0^2 - 9\omega^2)B^* + \omega_0^2\epsilon A^* & = 0 \end{cases} \tag{1.5.22}$$

Al primo ordine $9\omega^2 - \omega_0^2 \sim 8\omega_0^2$ perché δ/ω_0 è dell'ordine di ϵ:

$$\begin{cases} -8\omega_0^2 B + \omega_0^2\epsilon A & = 0 \\ -8\omega_0^2 B^* + \omega_0^2\epsilon A^* & = 0 \end{cases} \tag{1.5.23}$$

$$\tag{1.5.24}$$

Da cui $B = \epsilon A/8$. Sostituendo:

$$\begin{cases} \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \dfrac{\epsilon^2\omega_0^2}{8}\right)A + \omega_0^2\epsilon A^* & = 0 \\ \omega_0^2\epsilon A + \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \dfrac{\epsilon^2\omega_0^2}{8}\right)A^* & = 0 \end{cases} \tag{1.5.25}$$

La compatibilità algebrica dà:

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\epsilon^2\omega_0^2}{8}\right)^2 = \epsilon^2\omega_0^4 \tag{1.5.26}$$

$$\tag{1.5.27}$$

Ma $\omega = \omega_0 + \delta/2$:

$$2\delta^2 + 8\omega_0\delta - \epsilon^2\omega_0^2(\epsilon \mp 8) = 0 \tag{1.5.28}$$

che ha 4 soluzioni:

$$\delta^{\pm}_{\pm} = \frac{-4\omega_0 \pm \sqrt{16\omega_0^2 + 2\epsilon\omega_0^2(\epsilon \pm 8)}}{2} \tag{1.5.29}$$

$$= -2\omega_0\Big(1 \pm \sqrt{1 \pm \frac{\epsilon^2}{8}}\Big) \tag{1.5.30}$$

Le soluzioni col + non sono accettabili perché sono dell'ordine di ω_0, contro le ipotesi. Approssimando quindi le soluzioni sono

$$\sqrt{1 + \Big(\pm\epsilon + \frac{\epsilon^2}{8}\Big)} \sim 1 + \frac{1}{2}\Big(\pm\epsilon + \frac{\epsilon^2}{8}\Big) - \frac{1}{8}\Big(\pm\epsilon + \frac{\epsilon^2}{8}\Big)^2 \tag{1.5.31}$$

$$= 1 \pm \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{16} \tag{1.5.32}$$

$$\delta^{\pm} = \pm\epsilon\omega_0 - \frac{\epsilon^2}{8} \tag{1.5.33}$$

e la lingua di Arnol'd ha equazione:

$$\Big|\frac{\Omega}{\omega} - 2\Big| < \epsilon - \frac{\epsilon^2}{8} \tag{1.5.34}$$

1.5.3 1:1, ordine II

Stavolta

$$\theta = Ae^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t} + Be^{2i\omega t} + B^* e^{-2i\omega t} + C \tag{1.5.35}$$

$$\begin{cases} \omega_0^2 C + \epsilon\omega_0^2(A + A^*) & = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)A + \epsilon\omega_0^2(B + C) & = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)A* + \epsilon\omega_0^2(B* + C*) & = 0 \\ (\omega_0^2 - 4\omega^2)B + \epsilon\omega_0^2 A & = 0 \\ (\omega_0^2 - 4\omega^2)B^* + \epsilon\omega_0^2 A* & = 0 \end{cases} \tag{1.5.36}$$

Dalle ultime 2, approssimando come prima:

$$B = \frac{\epsilon}{3}A \tag{1.5.37}$$

Sostituendo B e C (ricavato dalla prima) nella seconda e nella terza:

$$\begin{cases} \Big(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{2}{3}\epsilon^2\omega_0^2\Big)A - \epsilon\omega_0^2 A^* & = 0 \\ -\epsilon\omega_0^2 A + \Big(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{2}{3}\epsilon^2\omega_0^2\Big)A^* & = 0 \end{cases} \tag{1.5.38}$$

Il determinante nullo dà

$$\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{2}{3}\epsilon^2\omega_0^2 = \pm\epsilon^2\omega_0^2 \tag{1.5.39}$$

Stavolta $\omega = \omega_0 + \delta$

$$3\delta^2 + 6\omega_0\delta + \epsilon^2\omega_0^2(2 \pm 3) = 0 \tag{1.5.40}$$

e come prima:

$$\delta^{\pm}_{\pm} = -\omega_0\left(1 \pm \sqrt{a - \frac{\epsilon^2}{3}(2 \pm 3)}\right) \tag{1.5.41}$$

Come sempre buttiamo via il $+$:

$$\delta^{\pm} = -\omega_0\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{3}(2 \pm 3)}\right) \sim -\omega_0\frac{\epsilon^2}{6}(2 \pm 3) \tag{1.5.42}$$

$$\left|\frac{\Omega}{\omega} - 1\right| < \frac{\pm 3 - 2}{6}\epsilon^2 \tag{1.5.43}$$

1.6 Oscillazioni non lineari

1.6.1 Legge oraria

Un potenziale fino al quarto grado dà un equazione differenziale cubica:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 + \beta x^3 = 0 \tag{1.6.1}$$

$$x = \epsilon y \tag{1.6.2}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + \alpha\epsilon y^2 + \beta\epsilon y^3 = 0 \tag{1.6.3}$$

Secondo il metodo di Poincaré-Lindstedt sviluppiamo in serie al secondo ordine sia y che ω:

$$y = A\cos(\omega t) + \epsilon y_1 + e^2 y_2 \tag{1.6.4}$$

$$\omega = \omega_0 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 \tag{1.6.5}$$

Sostituendo e separando gli ordini di grandezza, all'ordine ϵ abbiamo:

$$\ddot{y_1} + \omega_0^2 y_1 = 2\omega_0\omega_1 A\cos(\omega t) - \alpha A^2\cos^2(\omega t) \tag{1.6.6}$$

$$= -\frac{\alpha A^2}{2} + 2\omega_0\omega_1 A\cos(\omega t) - \frac{\alpha A}{2}\cos(2\omega t) \tag{1.6.7}$$

che è l'equazione di un oscillatore forzato. La forzante di frequenza ω porterebbe però a una divergenza nel limite $\omega \to \omega_0$, contro le ipotesi che y_1 è piccolo. Perciò addio ω_1.

La soluzione particolare viene

$$y_1 = -\frac{\alpha A^2}{2\omega_0^2}\Big[1 - \frac{1}{3}\cos(2\omega t)\Big] \tag{1.6.8}$$

Al secondo ordine abbiamo:

$$\begin{aligned}
\ddot{y_2} + \omega_0^2 y_2 = 2\omega_0\omega_2 A\cos(\omega t) \quad & (1.6.9)\\
+\frac{\alpha^2 A^3}{\omega_0^2}\cos(\omega t) \quad & (1.6.10)\\
-\frac{\alpha^2 A^3}{3\omega_0^2}\cos(2\omega t)\cos(\omega t) \quad & (1.6.11)\\
-\beta A^3\cos^3(\omega t) = 0 \quad & (1.6.12)\\
\ddot{y_2} + \omega_0^2 y_2 = A\cos(\omega t)\Big[2\omega_0\omega_2 + \frac{\alpha^2 A^2}{\omega_0^2} - \frac{\alpha^2 A^2}{6\omega_0^2} - \frac{3}{4}\beta A^3\Big] \quad & (1.6.13)\\
-A^3\cos(3\omega t)\Big(\frac{\alpha^2}{6\omega_0^2} + \frac{\beta}{4}\Big) \quad & (1.6.14)
\end{aligned}$$

dove abbiamo semplificato le potenze del coseno con

$$\begin{aligned}
\cos(2\omega t)\cos(\omega t) &= \frac{1}{2}[\cos(3\omega t) + \cos(\omega t)] \quad (1.6.15)\\
\cos(3\omega t) &= \frac{1}{4}[\cos(3\omega t) + 3\cos(\omega t)] \quad (1.6.16)
\end{aligned}$$

Il coefficiente della forzante di frequenza ω si deve annullare:

$$\omega_2 = \frac{1}{2\omega_0}\Big(\frac{3}{4}\beta - \frac{5}{6}\frac{\alpha^2}{\omega_0^2}\Big)A^2 \tag{1.6.17}$$

La soluzione particolare dell'equazione che rimane è

$$y_2 = \frac{A^3}{16\omega_0^2}\Big(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2}\Big)\cos(3\omega t) \tag{1.6.18}$$

Combinando le soluzioni e ritornando alla x, con $a = \epsilon A$:

$$x = a\cos(\omega t) \tag{1.6.19}$$
$$-a^2\frac{\alpha}{2\omega_0}[1 - \frac{1}{3}\cos(2\omega t)] \tag{1.6.20}$$
$$+\frac{a^3}{16\omega_0^2}\Big(\frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2}\Big)\cos(3\omega t) \tag{1.6.21}$$

E la frequenza:

$$\omega = \omega_0\Big[1 + \frac{a^2}{4\omega_0^2}\Big(\frac{3}{2}\beta - \frac{5}{3}\frac{\alpha^2}{\omega_0^2}\Big)\Big] \tag{1.6.22}$$

Per il pendolo semplice:

$$V(\theta) = \omega_0^2\Big(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24}\Big) \tag{1.6.23}$$
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta - \frac{\omega_0^2}{6}\theta^3 = 0 \tag{1.6.24}$$
$$\alpha = 0 \tag{1.6.25}$$
$$\beta = \frac{-\omega_0^2}{6} \tag{1.6.26}$$
$$\theta = \theta_m\cos(\omega t) - \frac{\theta_m^3}{192}\cos(3\omega t) \tag{1.6.27}$$
$$\omega = \omega_0\Big(1 - \frac{\theta_m^2}{16}\Big) \tag{1.6.28}$$
$$T = T_0\Big(1 + \frac{\theta_m^2}{16}\Big) \tag{1.6.29}$$

Notiamo che $\alpha = 0$ deriva dal fatto che il potenziale è pari.

1.6.2 Risonanza nelle oscillazioni non lineari

Consideriamo oscillazioni forzate e smorzate non lineari:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 + \beta x^3 = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \tag{1.6.30}$$

Nel caso lineare avevamo trovato una soluzione di ampiezza quadra b lorenziana. Dato che la nonlinearità introduce nella frequenza una dipendenza dal quadrato dell'oscillazione

$$\omega = \omega_0 + \chi b \tag{1.6.31}$$
$$b = \frac{\Gamma^2}{(\omega - \omega_0 - \chi b)^2 + \gamma^2} \tag{1.6.32}$$

Studiando la curva di risonanza $b(\omega)$ come funzione implicita otteniamo che

$$\frac{db}{d\omega} = -\frac{2b(\omega-\omega_0-\chi b)}{(\omega-\omega_0-\chi b)(\omega-\omega_0-3\chi b)+\gamma^2} \tag{1.6.33}$$

Il massimo di risonanza si ha in $b(\omega_0+\chi b) = \Gamma^2/\gamma^2$, come nelle oscillazioni non lineari. La lorenziana si inclina con pendenza χ. Quando si inclina troppo $b(\omega)$ diventa una funzione a 3 valori, che torna indietro nei punti a tangente verticale:

$$(\omega-\omega_0-\chi b)(\omega-\omega_0-3\chi b)+\gamma^2 = 0 \tag{1.6.34}$$

$$(\chi b)_\pm = \frac{1}{3}\left[2(\omega-\omega_0) \pm \sqrt{(\omega-\omega_0^2)-3\gamma^2}\right] \tag{1.6.35}$$

Le soluzioni reali esistono sse $|\omega-\omega_0| > \sqrt{3}\gamma$.

2 Onde

2.1 Intro

Un'onda è una perturbazione di una sorgente rispetto all'equilibrio i cui effetti si propagano a distanza con velocità finita. Un'onda non trasporta materia, ma può trasportare energia, quantità di moto o momento angolare.

Le onde possono essere longitudinali o trasversali:

- Liquidi e gas: longitudinali, perché non c'è sufficiente forza di richiamo. Eccezione: onde di gravità, sia trasversali che longitudinali
- Solidi: sia trasversali che longitudinali
- Vuoto: onde elettromagnetiche, trasversali

Un'onda che propaga senza deformarsi è una funzione di $w = \mathbf{u}\cdot\mathbf{x} \mp vt$ a seconda che sia progressiva o regressiva. Un'onda così, in una dimensione, soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \vee \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{2.1.1}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)F = 0 \tag{2.1.2}$$

Il vettore $\mathbf{u}$ dà la direzione di propagazione. Le superfici a w costante, cioè a F costante, sono perpendicolari a $\mathbf{u}$ e sono detti fronti d'onda. I fronti d'onda propagano con velocità v lungo la direzione $\mathbf{u}$.

Per scrivere l'equazione delle onde in coordinate sferiche occorre l'espressione del laplaciano:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} \tag{2.1.3}$$

In particolare se $F = f(r,t)/r$ il laplaciano si semplifica e l'equazione delle onde assomiglia alla forma cartesiana:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \tag{2.1.4}$$

Le soluzioni sono del tipo $F = f(r \mp vt)/r$, i fronti d'onda sono sferici.
L'ampiezza va come $1/r$, infatti la potenza deve essere costante:

$$P = IA \propto \frac{1}{r^2}4\pi r^2 = cost. \tag{2.1.5}$$

Le onde piane (progressive) si scrivono solitamente come

$$f(\mathbf{x},t) = A\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t + \phi) \tag{2.1.6}$$
$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{k}}{k} \tag{2.1.7}$$
$$v = \frac{\omega}{k} \tag{2.1.8}$$

Dove $k = 2\pi/\lambda$ rappresenta il periodo spaziale e $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ la frequenza (temporale). Infatti $v = \lambda\nu$.

2.1.1 Interferenza

Prendiamo onde piane con stessa frequenza e vettore d'onda ma fase relativa e ampiezze diverse:

$$f_1 = A_1\cos(kx - \omega t) \tag{2.1.9}$$
$$f_2 = A_2\cos(kx - \omega t + \phi) \tag{2.1.10}$$
$$f = f_1 + f_2 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\phi}\,\cos(kx - \omega t) \tag{2.1.11}$$

Si trova in generale che l'irraggiamento W di un'onda è proporzionale al quadrato dell'ampiezza, ma la dimostrazione di questo fatto è diversa per ogni tipo di onda. Feynman argomenta così:

- Un onda è tipo un oscillatore armonico
- Quando un'onda interagisce con la materia produce spostamento $x, v \propto f$

- $U \propto x^2 \propto f^2, T \propto v^2 \propto f^2$ q.e.d

L'intensità invece è:

$$I = \langle W \rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} W dt = \frac{A^2}{2} \tag{2.1.12}$$

Nel caso della somma di due onde

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\phi \tag{2.1.13}$$

$$\tag{2.1.14}$$

- Interferenza costruttiva: $I = 4I_0$
- Interferenza distruttiva: $I = 0$

Se ϕ varia lentamente rispetto a T ma velocemente rispetto allo strumento di misura $\langle \cos\phi \rangle = 0$ e le intensità semplicemente si sommano.

2.1.2 Battimenti

Come abbiamo visto negli oscillatori accoppiati, se sommiamo onde con stessa ampiezza, stessa fase e frequenze diverse otteniamo

$$f_1 = A\cos(k_1 x - \omega_1 t) \tag{2.1.15}$$

$$f_2 = A\cos(k_2 x - \omega_2 t) \tag{2.1.16}$$

$$f = f_1 + f_2 = 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t) \tag{2.1.17}$$

Facendo una media sul periodo veloce l'intensità è

$$I = A^2[1 + \cos(\Delta k x - \Delta\omega t)] \tag{2.1.18}$$

che è a sua volta un'onda, i cui fronti d'onda sono dati da:

$$\Delta x - \Delta\omega t = cost. \tag{2.1.19}$$

$$\Delta k dx - \Delta\omega dt = 0 \tag{2.1.20}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = v_g \tag{2.1.21}$$

La velocità di gruppo è quindi la velocità dell'intensità (in generale dell'*envelope*), e nel limite in cui $\Delta\omega, \Delta k \to 0$ $v_g = d\omega/dk$.

Velocità di gruppo e velocità di fase sono uguali sse la velocità di fase non dipende da k.

I mezzi in cui le due velocità sono diverse si dicono dispersivi e la relazione $\omega(k)$ si dice relazione di dispersione.

In generale

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda} \tag{2.1.22}$$

- Dispersione normale: $\frac{dv_f}{d\lambda} > 0 \implies v_g < v_f$
- Dispersione anomala: $\frac{dv_f}{d\lambda} < 0 \implies v_g > v_f$

2.2 Corda vibrante

2.2.1 Modi normali

Se prendiamo un pezzo di corda inclinata in x di θ_1 e in $x + dx$ di θ_2 le equazioni del moto per una masserella sono

$$\begin{cases} dma_x & = T_2 \cos\theta_2 - T_1 \cos\theta_1 \\ dma_y & = T_2 \sin\theta_2 - T_1 \sin\theta_1 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

e approssimando fino alla morte, e scambiando seni con tangenti:

$$\begin{cases} dma_x & = 0 \\ dma_y & = T(\tan\theta_2 - \tan\theta_1) \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Ma $y = y(x, t) \implies \tan\theta = \partial y / \partial x$, quindi l'equazione diventa

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{2.2.3}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{2.2.4}$$

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{2.2.5}$$

Ora, l'equazione delle onde così si risolve fattorizzando la soluzione in una parte spaziale e una temporale:

$$y(x, t) = X(x)T(t) \tag{2.2.6}$$

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \tag{2.2.7}$$

L'ultima uguaglianza può essere vera solo se entrambi i lati sono costanti. Questo vuol dire che X e T sono oscillatori armonici, più in generale soddisfano l'equazione di Helmotz. Dopo alcune scelte di notazione

$$y(x,t) = [A\cos(kx) + B\sin(kx)]\sin(\omega t + \phi) \tag{2.2.8}$$

La condizione che gli estremi siano fissi si traduce in

$$A = 0 \tag{2.2.9}$$
$$kL = n\pi \tag{2.2.10}$$
$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \tag{2.2.11}$$
$$\nu_n = \frac{v}{2L}n \tag{2.2.12}$$

Un'onda stazionaria ha

- $n+1$ nodi: $x_m^N = \frac{m}{n}L$
- n antinodi: $x_m^{AN} = \frac{2m+1}{2n}L$

La soluzione generale quindi è

$$y(x,t) = \sum_n B_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t + \phi_n) \tag{2.2.13}$$

2.2.2 Serie di Fourier

Qualunque funzione di periodo T si può rappresentare con una serie di Fourier

$$y(t) = A_0 + \sum_n A_n \cos(\omega_n t) + \sum_n B_n \sin(\omega_n t) \tag{2.2.14}$$
$$\omega_n = \frac{2\pi}{T}n \tag{2.2.15}$$

Questo si può dimostrare costruttivamente prendendo

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T dt\, y(t) \tag{2.2.16}$$
$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T dt\, y(t)\cos(\omega_n t) \tag{2.2.17}$$
$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T dt\, y(t)\sin(\omega_n t) \tag{2.2.18}$$

Grazie alle relazioni di ortonormalità di seni e coseni l'energia dell'onda si fa con il teorema di Parseval

$$E = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_n A_n^2 + B_n^2 \tag{2.2.19}$$

Esempio 1. *Dente di sega*

L'equazione è $y = t - 1/2, 0 < t < 1$. L'onda è dispari quindi $A_n = 0$.

$$B_n = 2\int_0^1 dt\Big(t - \frac{1}{2}\Big)\sin(2\pi nt) \tag{2.2.20}$$

$$= -\frac{1}{\pi n} \tag{2.2.21}$$

La parte kek è che l'energia è il problema di Basilea:

$$E = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y^2 dt = \frac{1}{12} \tag{2.2.22}$$

$$= \sum_n (-\frac{1}{\pi n})^2 = \frac{1}{2\pi^2}\sum_n \frac{1}{n^2} \tag{2.2.23}$$

$$\implies \sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{2.2.24}$$

Esempio 2. *Onda quadra*

L'equazione è $y = sgn t, -1/2 < t < 1/2$. Anche quest'onda è dispari.

$$B_n = \frac{4}{\pi n}\sin^2\Big(n\frac{\pi}{2}\Big) \tag{2.2.25}$$

$$E = \frac{1}{2}\sum_n B_n^2 \tag{2.2.26}$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\sum_n \frac{1}{(2n+1)^2} \tag{2.2.27}$$

La somma si può calcolare notando che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \tag{2.2.28}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \tag{2.2.29}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8} \tag{2.2.30}$$

Da notare che compaiono solo B_n dispari. Quest'onda permette di derivare anche una formula per il calcolo di π:

$$y\Big(\frac{1}{4}\Big) = 1 = \frac{4}{\pi} = \Big(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\dots\Big) \tag{2.2.31}$$

La serie tra parentesi è detta serie di Leibniz.

Esempio 3. *Onda triangolare*

L'equazione è $y = t\, sgn\, t + 1/4, -1/2 < t < 1/2$. Stavolta l'onda è pari.

$$A_n = \frac{2}{\pi^2 n^2}\sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\right) \tag{2.2.32}$$

E con lo stesso ragionamento di prima si ottiene $\zeta(4)$

$$E = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y^2 dt = \frac{2}{\pi^2}\sum_0 \frac{1}{(2n+1)^4} \tag{2.2.33}$$

$$\dots \implies \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \tag{2.2.34}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{16}{15}\frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90} \tag{2.2.35}$$

che sembra tornare utile per il calcolo dell'energia di un corpo nero.

2.2.3 Trasformata di Fourier

Riarrangiando si può scrivere

$$y = A_0 + \sum_n A_n\cos(\omega_n t) + \sum_n B_n \sin(\omega_n t) \tag{2.2.36}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n f_n \tag{2.2.37}$$

Con

$$f_n = e^{i\omega_n t} \tag{2.2.38}$$

$$C_0 = A_0 \tag{2.2.39}$$

$$C_n = \frac{A_n - iB_n}{2} \tag{2.2.40}$$

$$C_{-n} = C_n^* \tag{2.2.41}$$

Si verifica che le f_n sono ortonormali (in senso complesso).
I coefficienti su questa nuova base si possono calcolare come

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\, y f_n^* \tag{2.2.42}$$

$$\tag{2.2.43}$$

Un segnale aperiodico è un segnale di periodo infinito:

$$y = \lim_{T\to\infty} y_T \tag{2.2.44}$$

$$y_T = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}(\omega_{n+1}-\omega_n)e^{i\omega_n t}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\, y_T e^{-i\omega_n t} \tag{2.2.45}$$

$$\tag{2.2.46}$$

Passando al continuo $\sum_{-\infty}^{+\infty}(\omega_{n+1}-\omega_n) \to \int d\omega$ e otteniamo infine

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\hat{y}(\omega) \tag{2.2.47}$$

$$y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t} y(t) \tag{2.2.48}$$

$\hat{y}$ è la trasformata di Fourier di y, che è la sua antitrasformata.

2.3 Onde nei fluidi

2.3.1 Fluidodinamica

Si parte dall'equazione di Eulero: la seconda legge della dinamica in termini di densità, campo di velocità e densità di forze. La pressione gioca il ruolo della densità di potenziale.

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{F} \tag{2.3.1}$$

La derivata totale delle velocità si sviluppa secondo la regola della catena come

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} \tag{2.3.2}$$

Si può scomporre la derivata covariante partendo dal desiderio di ricondurre $v_x v_x'$ a $(v^2)_x'/2$ o qualcosa del genere

$$[(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}]_x = v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + \Big(+ v_y\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}\Big) \tag{2.3.3}$$

$$+ v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\Big(- v_y\frac{\partial v_y}{\partial x}\Big) + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\Big(- v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}\Big) \tag{2.3.4}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x} + [(\nabla\times\mathbf{v})\times\mathbf{v}]_x \tag{2.3.5}$$

e il risultato vale per tutte le componenti. Il bello è che nel limite di flusso irrotazionale possiamo buttare via il termine vorticoso. Scriviamo equazione di Eulero ed equazione di continuità:

$$\begin{cases} \rho\Big(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\mathbf{v}^2\Big) + \nabla(p+V) & = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) & = 0 \end{cases} \tag{2.3.6}$$

La cosa kek è che butteremo sempre via anche $\nabla\mathbf{v}^2/2$.

2.3.2 Onde acustiche

- La forza di gravità è trascurabile: $V = 0$
- $p \to p_0 + p, \rho \to \rho_0 + \rho$ si discostano poco dall'equilibrio.
- $p, \rho, \mathbf{v}$ infinitesimi del primo ordine, buttiamo via tutti termini successivi

Le equazioni linearizzate sono

$$\begin{cases} \rho_0\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p & = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho_0(\mathbf{v}) & = 0 \end{cases} \tag{2.3.7}$$

Per disaccoppiarle, in modo abbastanza ignorante, sottraiamo alla divergenza della prima la derivata temporale della seconda, per ottenere

$$\nabla^2 p - \frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = 0 \tag{2.3.8}$$

Per continuare basta trovare una relazione tra le due quantità, per esempio

$$p = p(\rho) \tag{2.3.9}$$

$$\nabla^2 p = c_s^2\nabla^2\rho \tag{2.3.10}$$

$$c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}\Big|_0} \tag{2.3.11}$$

Qui Newton ha usato la legge di Boyle $pV = cost.$ e ha preso p e ρ direttamente proporzionali, e gli è venuto $c_s = \sqrt{p_0/\rho_0} = 280\, m/s$ che lo sapevano pure all'epoca che era sbagliato.

Per ottenere il risultato corretto si deve usare la legge per i processi non isotermi ma adiabatici:

$$p = a\rho^\gamma \tag{2.3.12}$$
$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{f+2}{f} = 1.4 \tag{2.3.13}$$
$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma\frac{p}{\rho} \tag{2.3.14}$$
$$c_s = \sqrt{\gamma} c_s^{Newton} = 330\, m/s \tag{2.3.15}$$

La velocità del suono è dell'ordine del moto di agitazione termica:

$$c_0^2 = \gamma\frac{p_0}{\rho_0} = \gamma\frac{RT_0}{\mathcal{M}} = \gamma\frac{R}{N_A}\frac{T_0}{m} = \frac{k_B T_0}{m} \tag{2.3.16}$$
$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{f}{2}k_B T \implies \frac{k_B T}{m} = \frac{\bar{v^2}}{5} \tag{2.3.17}$$
$$c_s^2 = \frac{\gamma}{5}\bar{v^2} = \frac{7}{25}\bar{v^2} \tag{2.3.18}$$

La velocità del moto di oscillazione delle molecole si può ricavare partendo dall'equazione di Eulero linearizzata:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2.3.19}$$
$$p = p_m \sin(kx - \omega t) \tag{2.3.20}$$
$$v = -k\frac{p_m}{\rho}\int dt \cos(kx - \omega t) = \frac{p_m}{\rho_0 c_s}\sin(kx - \omega t) \tag{2.3.21}$$

così che in condizioni standard $v_m = 0.5 \cdot 10^{-4}$ m/s, che a c_s non gli fa neanche il solletico.

2.3.3 Onde del mare

Stavolta consideriamo il fluido incomprimibile: $\mathbf{v} = -\nabla\phi \implies \nabla^2\phi = 0$.

Cerchiamo onde piane monocromatiche che propagano lungo x: $\phi(x, y, t) = \phi_0(x, y)e^{-i\omega t}$

L'equazione di Laplace si fattorizza come quella delle onde e scegliamo

$$-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = k^2 \tag{2.3.22}$$
$$\phi = (Ae^{ky} + Be^{-ky})\cos(kx - \omega t) \tag{2.3.23}$$

Le condizioni sul fondo permettono di eliminare una costante:

$$v_y\Big|_\eta = -\frac{\partial\phi}{\partial y}\Big|_\eta = 0 \tag{2.3.24}$$

$$Ae^{kh} = Be^{-kh} \equiv \frac{C}{2} \tag{2.3.25}$$

$$\phi = C\cosh[k(h-y)]\cos(kx-\omega t) \tag{2.3.26}$$

L'equazione di Eulero linearizzata si può riscrivere in termini del potenziale:

$$\nabla\Big(-\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + p + V\Big) = 0 \tag{2.3.27}$$

$$\tag{2.3.28}$$

Se prendiamo $\eta(x,t)$ come l'altezza del pelo dell'acqua e confrontiamo il valore della quantità nel gradiente, che è indipendente dalla posizione, ad altezza η e 0, otteniamo:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}\Big|_{y=\eta} = -g\eta \tag{2.3.29}$$

$$\eta = -\frac{C\omega}{g}\cosh(kh)\sin(kx-\omega t) \tag{2.3.30}$$

Quindi la perturbazione della superficie dell'acqua è un'onda progressiva.

La condizioni al contorno per η, insieme alla relazione precedente, danno la relazione di dispersione:

$$v_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y}\Big|_{y=\eta} = \frac{\partial\eta}{\partial t} \tag{2.3.31}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\Big|_{y=\eta} = -g\frac{\partial\eta}{\partial t} \tag{2.3.32}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\Big|_{y=\eta} = g\frac{\partial\phi}{\partial y}\Big|_{y=\eta} \tag{2.3.33}$$

$$\omega^2 = gk\tanh(kh) \tag{2.3.34}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\Big(2\pi\frac{h}{\lambda}\Big)} \tag{2.3.35}$$

Esempio 4. *Acque profonde:*

$$\tanh\Big(2\pi\frac{h}{\lambda}\Big) \to 1 \tag{2.3.36}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{g}{k}} \tag{2.3.37}$$

$$v_g = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{v_f}{2} \tag{2.3.38}$$

Esempio 5. *Acque basse:*

$$\tanh\left(2\pi\frac{h}{\lambda}\right) \sim 2\pi\frac{h}{\lambda} \tag{2.3.39}$$

$$v_f = \sqrt{gk} \tag{2.3.40}$$

$$v_g = v_f \tag{2.3.41}$$

Integrando la velocità a partire dall'espressione del potenziale troviamo la legge oraria per una particella d'acqua:

$$x' = a(y)\cos(kx - \omega t) \tag{2.3.42}$$

$$y' = b(y)\sin(kx - \omega t) \tag{2.3.43}$$

$$a(y) = \frac{kC}{\omega}\cosh[k(h-y)] \tag{2.3.44}$$

$$b(y) = \frac{kC}{\omega}\sinh[k(h-y)] \tag{2.3.45}$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \tag{2.3.46}$$

Le traiettorie locali quindi sono ellittiche con distanza tra i fuochi $\sqrt{a^2 - b^2} = kC/\omega$ costante, ma con il rapporto tra i semiassi $b/a = \tanh[k(h-y)]$ che dipende dalla profondità.

In profondità l'ellisse si schiaccia a diventare un segmento, vicino alla superficie la traiettoria è simile a una circonferenza (ma la distanza tra i fuochi costante? Boh).

3 Diffrazione

3.1 Interferometri

NGL non ho voglia di disegnare e senza è un po' difficile.

Un interferometro divide una sorgente in due fasci e li ricombina dopo averne sfasato uno. Questo è il modo più semplice per creare fasci coerenti e osservare interferenza.

La fase relativa anche se varia lentamente rispetto al periodo dell'onda può variare molto più velocemente del tempo di acquisizione del rivelatore, dell'ordine del milli/microsecondo. La media operata da un rivelatore lento uccide l'interferenza.

3.1.1 Young

Una sorgente S che si divide in S_1 e S_2, fenditure a distanza b, θ è l'angolo fra l'orizzontale e la x partendo dal punto medio delle fenditure. D è la distanza orizzontale di x dalle fenditure.

Le fenditure sono sorgenti puntiformi di onde sferiche

$$f_1 = \frac{A}{r_1}\cos(kr_1 - \omega t) \tag{3.1.1}$$
$$f_1 = \frac{A}{r_1}\cos(kr_1 - \omega t) = \frac{A}{r_2}\cos(kr_1 - \omega t + \phi) \tag{3.1.2}$$
$$\phi = k(r_2 - r_1) \tag{3.1.3}$$
$$I = 4I_0\cos^2\frac{\phi}{2} \tag{3.1.4}$$

Secondo Prati, invece che considerare triangoli con due angoli retti, applichiamo il teorema di Carnot ai triangoli $r_1 - r - \frac{b}{2}$ e $r_2 - r - \frac{b}{2}$.

$$r_1^2 = r^2 + \frac{b^2}{4} - 2r\frac{b}{2}\cos(90-\theta) = r^2 + \frac{b^2}{4} - rb\sin\theta \tag{3.1.5}$$
$$r_2^2 = r^2 + \frac{b^2}{4} - 2r\frac{b}{2}\cos(90+\theta) = r^2 + \frac{b^2}{4} + rb\sin\theta \tag{3.1.6}$$
$$r_2 - r_1 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2r} = b\sin\theta \tag{3.1.7}$$

La fase relativa è quindi

$$\phi = k(r_2 - r_1) = kb\sin\theta \sim 2\pi\frac{bx}{\lambda D} \tag{3.1.8}$$
$$I = 4I_0\cos^2\left(\pi\frac{bx}{\lambda D}\right) \tag{3.1.9}$$

- Fasce chiare: $\frac{x_n}{D} = \frac{\lambda}{b}n$
- Fasce scure: $\frac{x_n}{D} = \frac{\lambda}{b}(n + \frac{1}{2})$

3.1.2 Michelson

Un *beam splitter* a 45° separa un raggio che percorre L, rimbalza e raggiunge il rivelatore, e un secondo che percorre $L + d$.

Sull'asse si ha semplicemente $\phi = 2kd$, mentre su un punto fuori asse di angolo θ:

$$r_2 - r_1 = \sqrt{(D+2d)^2 + r^2} - \sqrt{D^2 + r^2} \sim \frac{2Dd}{\sqrt{D^2 + r^2}} = 2d\cos\theta \tag{3.1.10}$$
$$I = 4I_0\cos^2(2\pi\frac{d}{\lambda}\cos\theta) \tag{3.1.11}$$

Sull'asse abbiamo:

- Punti luminosi per $d = \frac{\lambda}{2}n$

- Punti scuri se $d = \frac{\lambda}{2}(n + \frac{1}{2})$

Fuori dall'asse

$$I = 4I_0 \cos^2 \left(2\pi \frac{d}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{D^2}}} \right) \tag{3.1.12}$$

$$\sim 4I_0 \cos^2 \Big[2\pi \frac{d}{\lambda} \Big(1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{D^2} \Big) \Big] \tag{3.1.13}$$

Cerchiamo frange chiare e scure intorno a un punto luminoso $d/\lambda = N/2$

$$I = 4I_0 \cos^2 (\pi \frac{d}{\lambda} \frac{r^2}{D^2}) \tag{3.1.14}$$

Le frange chiare: $r_n = D\sqrt{n\frac{\lambda}{d}}$. A differenza dell'esperimento di Young non sono equidistanti.

3.1.3 Mach-Zender

Se pensavi che un *beam splitter* dividesse un'onda in due parti uguali, magari di ampiezza $A/\sqrt{2}$, ti sbagliavi, perché se fai partire due raggi perpendicolari l'intensità finale viene la metà di quella iniziale.

Una possibile spiegazione è che le riflessioni producano uno sfasamento totale di π, per esempio $\pi/2$ ciascuna.

L'interferometro di Mach-Zender mette in luce il comportamento ondulatorio della luce perché succede proprio questo: nella direzione (1) si verifica interferenza costruttiva, e si osserva luce, mentre nella direzione (2) la diffrenza di fase è π e non si osserva nulla.

Ma quando osservo il fotone, questo si comporta come particella? La luce si divide equamente? ...

3.2 Integrale di Kirchoff

Il principio di Huygens non è un principio fisico, ma una regola di pollice per valutare qualitativamente la diffrazione: si può considerare ogni punto della sorgente come una sorgente puntiforme di onda sferica, e considerare l'inviluppo di tutte le onde.

La formulazione quantitativa del principio di Huygens è l'integrale di Kirchoff, che dà il campo rifratto in un punto dello spazio in funzione del valore del campo sull'apertura e della geometria della stessa.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{A}} d\tilde{x}\, d\tilde{y}\, \mathbf{E}(\tilde{x}, \tilde{y}, t) \nabla_n \Big(\frac{e^{ikR}}{R} \Big) \tag{3.2.1}$$

$$\sim -\frac{ik}{2\pi} \int_{\mathcal{A}} d\tilde{x}\, d\tilde{y} \mathbf{E}(\tilde{x}, \tilde{y}, t) \frac{e^{ikR}}{R} \cos(n, R) \tag{3.2.2}$$

dove si può approssimare la derivata dell'onda sferica perché il secondo contributo va come $1/R^2$. In effetti approssimando l'integrale tratta ogni punto della superficie come una sorgente puntiforme e pesa i contributi con il fattore di obliquità (legge di Lambert).

L'integrale di Kirchoff si può calcolare esattamente sull'asse z nel caso di un'apertura circolare di raggio a:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \int_z^{\sqrt{a^2+z^2}} RdR\,\mathbf{E}(\tilde{x},\tilde{y},t)\frac{d}{dR}\Big(\frac{e^{ikR}}{R}\Big)\frac{z}{R} \tag{3.2.3}$$

$$= -z\frac{e^{ikR}}{R}\Bigg|_z^{\sqrt{a^2+z^2}} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \tag{3.2.4}$$

$$= \mathbf{E}_0\cos{(kz-\omega t)} - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\mathbf{E}_0\cos(k\sqrt{a^2+z^2}-\omega t) \tag{3.2.5}$$

Osserviamo che il contributo dell'interferenza tende a 0 vicino all'apertura. L'intensità è:

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{E}^2 dt \tag{3.2.6}$$

$$= I_0\left[1 + \frac{z^2}{a^2+z^2} - \frac{2z}{\sqrt{a^2+z^2}\cos(k\sqrt{a^2+z^2}-kz)}\right] \tag{3.2.7}$$

$$I_{max} = I_0(1+\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}) \sim \begin{cases} I_0(1+\frac{z}{a})^2 & z \ll a \\ 4I_0 & z \gg a \end{cases} \tag{3.2.8}$$

$$I_{min} = I_0(1-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}) \sim \begin{cases} I_0(1-\frac{z}{a})^2 & z \ll a \\ 0 & z \gg a \end{cases} \tag{3.2.9}$$

Per $z \gg a$ possiamo inoltre approssimare:

$$I = 4I_0\sin^2\Big(\frac{ka^2}{4z}\Big) \tag{3.2.10}$$

- Minimi: $z_n = \frac{a^2}{\lambda}\frac{1}{2n}$
- Massimi: $z_n = \frac{a^2}{\lambda}\frac{1}{2n+1}$

a^2/λ segna quindi il confine tra la diffrazione di Fresnel (*near field*) e di Fraunhofer (*far field*). Dopo il confine l'intensità sull'asse decade come z^2.

Per la diffrazione prodotta da un disco opaco basta cambiare gli estremi di integrazione:

$$= -z\frac{e^{ikR}}{R}\Bigg|_{\sqrt{a^2+z^2}}^{+\infty} \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \tag{3.2.11}$$

$$\mathbf{E} = \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\mathbf{E}_0 \cos(k\sqrt{a^2+z^2} - \omega t) \tag{3.2.12}$$

$$I = I_0 \frac{z^2}{a^2+z^2} \tag{3.2.13}$$

Viene confermato il principio di Babinet:

$$\mathbf{E}_{apertura} = \mathbf{E}_{senza} - \mathbf{E}_{disco} \tag{3.2.14}$$

$$\mathbf{E}_{disco} = \mathbf{E}_{senza} - \mathbf{E}_{apertura} \tag{3.2.15}$$

Qui fa abbastanza ridere perché ci sono due previsioni paradossali:

- Con la fenditura, sull'asse ci sono infiniti punti scuri
- Con il disco opaco, l'asse non è mai al buio tranne che sul disco stesso

Questo venne usato come argomento contro l'interpretazione ondulatoria della luce da parte di Poisson, che venne BTFO quando Arago osservò sperimentalmente quella oggi chiamiamo proprio macchia di Poisson. Questo è il motivo nel punto della Terra antipodale all'antenna di una stazione radio c'è ricezione perfetta.

3.3 Diffrazione di Fraunhofer

Per il limite di *far field* consideriamo le approssimazioni:

$$R_0 \gg z, a, \lambda \tag{3.3.1}$$

$$R = (x-\hat{x})^2 + (y-\hat{y})^2 + z^2 \tag{3.3.2}$$

$$\sim R_0(1 - \frac{x\hat{x}+y\hat{y}}{R_0^2}) \tag{3.3.3}$$

$$\tag{3.3.4}$$

L'integrale di Kirchoff (con la derivata approssimata), considerando un onda piana monocromatica, è:

$$\mathbf{E} = \frac{-ik}{2\pi}\frac{z}{R_0}\int_{\mathcal{A}} d\tilde{x}\, d\tilde{y}\, \frac{e^{-ik\frac{x\hat{x}+y\hat{y}}{R_0}}}{R_0}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \tag{3.3.5}$$

Se ora riscaliamo le coordinate del punto:

$$u = \frac{kx}{R_0} \tag{3.3.6}$$

$$v = \frac{ky}{R_0} \tag{3.3.7}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{ikz}{2\pi R_0^2}\mathbf{E}_0 e^{i(kx-\omega t)} \int_{\mathcal{A}} d\tilde{x}d\tilde{y}e^{-i(u\hat{x}+v\hat{y})} \tag{3.3.8}$$

$$= -\frac{ikz}{2\pi R_0^2}\hat{\chi_{\mathcal{A}}} \tag{3.3.9}$$

3.3.1 Apertura circolare

Coordinate sferiche:

$$\begin{cases} u = \dfrac{kx}{R_0} = k\sin\theta\cos\phi \\ v = \dfrac{ky}{R_0} = k\sin\theta\sin\phi \end{cases} \tag{3.3.10}$$

$$u\hat{x} + v\hat{y} = \rho k \sin\theta\cos(\tilde{\phi} - \phi) \equiv k\sin\theta \tag{3.3.11}$$

Il problema è simmetrico cilindricamente e possiamo scegliere $\phi = \pi$

$$\mathbf{E} = -\frac{ikz}{R_0^2}\mathbf{E}_0 e^{i(kx-\omega t)} \int_0^a \rho d\rho (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\tilde{\phi}\, e^{i\rho s\cos\tilde{\phi}}) \tag{3.3.12}$$

$$= -\frac{ikz}{R_0^2}\mathbf{E}_0 e^{i(kx-\omega t)} \int_0^a \rho\, d\rho\, J_0(\rho s) \tag{3.3.13}$$

dove

$$J_n = \frac{1}{2\pi i^n}\int_0^{2\pi} d\alpha\, e^{ix\cos\alpha}\cos(n\alpha) \tag{3.3.14}$$

è la funzione di Bessel di prima specie, di cui useremo la seguente proprietà:

$$\int_0^x xJ_0(x)dx = xJ_1(x) \tag{3.3.15}$$

$$x' = \rho s \tag{3.3.16}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{ikz}{R_0^2}\mathbf{E}_0 e^{i(kx-\omega t)} \int_0^{sa} \frac{x'dx'}{s^2} J_0(x) \tag{3.3.17}$$

$$= -\frac{ikz}{R_0^2 s^2}\mathbf{E}_0 e^{i(kx-\omega t)} saJ_1(sa) \tag{3.3.18}$$

$$= \frac{za}{R_0^2}\mathbf{E}_0 \sin(kR_0 - \omega t)\frac{J_1(ka\sin\theta)}{\sin\theta} \tag{3.3.19}$$

Ponendo $x = ka\sin\theta$ otteniamo che l'intensità è

$$I = \bar{I}_0 \left[\frac{2J_1(x)}{x}\right]^2 \tag{3.3.20}$$

Possiamo usare per J_1 le ottime approssimazioni

$$J_1 \sim \begin{cases} \dfrac{x}{2} & |x| \ll 1 \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) & |x| \gg 1 \end{cases} \tag{3.3.21}$$

J_1, e quindi I, si annullano nei punti $x_n^{min} = (n + 1/4)\pi$.
I massimi di I sono massimi e minimi di $J_1(x)/x$:

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}x \tag{3.3.22}$$

che ha soluzioni grafiche con approssimazione sempre più buona $x_n^{max} = (n + 3/4)\pi$.
Possiamo calcolare la differenza tra i primi due picchi di intensità:

$$\frac{I(x_1^{max})}{I_0} = \frac{8}{\pi(x_1^{max})^3} \sim 0.015 \tag{3.3.23}$$

Calcoliamo inoltre la larghezza del massimo centrale in termini di θ:

$$x_1^{min} = \frac{5}{4}\pi = ka\sin\theta \tag{3.3.24}$$

$$\sin\theta_1^{min} \sim \theta_1^{min} = 0.625\frac{\lambda}{a} \tag{3.3.25}$$

Questa è un'approssimazione, mentre il valore corretto è $\theta_1^{min} = 0.61\lambda/a$ e la quantità $1/\theta_1^{min} = D/1.22\lambda$ è detto potere risolvente di un telescopio: due oggetti vengono risolti se la separazione angolare è almeno θ_1^{min}.

3.3.2 Apertura rettangolare

$$\mathbf{E} = -\frac{ikz}{2\pi R_0^2}\mathbf{E}_0 e^{i(kx-\omega t)} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} d\tilde{x}\, e^{-iu\tilde{x}} \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} d\tilde{y}\, e^{-iv\tilde{y}} \tag{3.3.26}$$

$$= \frac{zaA}{\lambda R_0^2}\mathbf{E}_0 \sin(kR_0 - \omega t)\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{ua}{2}\Big)\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{vA}{2}\Big) \tag{3.3.27}$$

$$I = \bar{I}_0\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{ua}{2}\Big)\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{vA}{2}\Big) \tag{3.3.28}$$

$$\bar{I}_0 = \Big(\frac{zaA}{\lambda R_0^2}\Big) I_0 \tag{3.3.29}$$

- Minimi di I: $x_n^{min} = n\pi$
- Massimi di I, ovvero estremanti di sinc: $\tan x = x \implies x_n^{max} \sim (2n+1)\frac{\pi}{2}$

Calcoliamo di nuovo caduta di intensità e larghezza del massimo centrale:

$$\frac{I(x_1^{min})}{I_0} = \operatorname{sinc}\Big(\frac{3}{2}\pi\Big) \sim 0.045 \tag{3.3.30}$$

$$x_1^{min} - x_{-1}^{min} = 2\pi \tag{3.3.31}$$

Nel limite in cui $A \gg a$ lungo y non c'è più diffrazione e possiamo studiare il problema planare in termini dell'angolo θ tra la posizione e l'asse z.

Il campo diffratto dipende dalla trasformata di Fourier monodimensionale della fenditura:

$$\mathbf{E} = \mathbf{C}\int_{-\infty}^{+\infty} d\hat{x}\chi_{\mathcal{A}} e^{-i\frac{k\sin\theta\hat{x}}{u}} \tag{3.3.32}$$

$$= \mathbf{C}a\operatorname{sinc}(\pi\frac{a}{\lambda}\sin\theta) \tag{3.3.33}$$

$$I = \bar{I}_0\operatorname{sinc}^2(\pi\frac{a}{\lambda}\sin\theta) \tag{3.3.34}$$

I minimi di intensità sono in $\sin\theta_n^{min} \sim \theta_n^{min} = n\lambda/a$.

3.3.3 Teorema dell'array

Consideriamo un'array di fenditure verticali centrate in $\tilde{x}_n = nb$. Il campo risultante sarà la somma dei campi dovuti a ciascuna fenditura.

La fenditura n ha funzione caratteristica $\chi_{\mathcal{A}_n}(\tilde{x}) = \chi_{\mathcal{A}}(\tilde{x} - \tilde{x}_n)$, pertanto il campo diffratto è:

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{C}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}\chi_{\mathcal{A}_n} e^{-ik\sin\theta\tilde{x}} \tag{3.3.35}$$

$$= \mathbf{C}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}\chi_{\mathcal{A}}(\tilde{x} - \tilde{x}_n) e^{-ik\sin\theta\tilde{x}} \tag{3.3.36}$$

$$\tilde{x}' = \tilde{x} - \tilde{x}_n \tag{3.3.37}$$

$$= \mathbf{C}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}'\chi_{\mathcal{A}}(\tilde{x}') e^{-ik\sin\theta(\tilde{x}'+\tilde{x}_n)} \tag{3.3.38}$$

$$= e^{-ik\sin\theta\tilde{x}_n}\mathbf{E}_1 \tag{3.3.39}$$

Insomma traslare la fenditura non fa altro che sfasare il campo.

Il campo diffratto dall'intero *array* sarà quindi

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \sum \mathbf{E}_n && (3.3.40)\\
&= \sum (e^{-ik\sin\theta \tilde{x}_n})\mathbf{E}_1 && (3.3.41)\\
&= \mathbf{C}a\Big(\sum e^{-ik\sin\theta\tilde{x}_n}\Big)\operatorname{sinc}\Big(\pi\frac{a}{\lambda}\sin\theta\Big) && (3.3.42)
\end{aligned}
$$

3.3.4 Doppia fenditura

Calcoliamo il fattore di sfasamento:

$$
\begin{aligned}
Z &= e^{-ik\sin\theta b} + e^{-2ik\sin\theta b} && (3.3.43)\\
&= e^{-\frac{3}{2}ik\sin\theta b}(e^{ik\sin\theta\frac{b}{2}} + e^{-ik\sin\theta\frac{b}{2}}) && (3.3.44)\\
&= 2e^{-ik\sin\theta\frac{3}{2}b}\cos\left(\pi\frac{b}{\lambda}\sin\theta\right) && (3.3.45)
\end{aligned}
$$

Incorporiamo il fattore di fase nella costante $\mathbf{C}$ così che l'intensità assume la forma

$$
I = \bar{I}_0\cos^2\left(\pi\frac{b}{\lambda}\sin\theta\right)\operatorname{sinc}^2\Big(\pi\frac{a}{\lambda}\sin\theta\Big) \qquad (3.3.46)
$$

dove l'intensità diffratta dalla singola fenditura è modulata dal fattore di interferenza di Young.

3.3.5 Reticolo

Se parliamo di un reticolo di N fenditure possiamo calcolare il fattore di sfasamento con la somma parziale della serie geometrica:

$$
\begin{aligned}
x(1+x+\cdots+x^N) &= (1+x+\cdots+x^N) + x^{N+1} - 1 && (3.3.47)\\
1+x+\cdots+x^N &= \frac{x^N-1}{x-1} && (3.3.48)\\
Z &= \frac{e^{-ik\sin\theta Nb}-1}{1-e^{-ik\sin\theta b}} && (3.3.49)\\
&= \frac{e^{-ik\sin\theta\frac{N}{2}b}}{e^{-ik\sin\theta\frac{n}{2}b}}\frac{e^{-ik\sin\theta\frac{N}{2}b} - e^{ik\sin\theta\frac{N}{2}b}}{e^{ik\sin\theta\frac{b}{2}} - e^{-ik\sin\theta\frac{b}{2}}} && (3.3.50)\\
&= e^{-ik\sin\theta\frac{(N+1)b}{2}}\frac{\sin(Nk\sin\theta\frac{b}{2})}{\sin(k\sin\theta\frac{b}{2})} && (3.3.51)
\end{aligned}
$$

Ancora una volta inglobiamo il fattore di fase in $\mathbf{C}$ così che l'intensità è

$$I = \bar{I}_0 \frac{\sin(Nk\sin\theta\frac{b}{2})}{\sin(k\sin\theta\frac{b}{2})}\,\mathrm{sinc}^2\Big(\pi\frac{a}{\lambda}\sin\theta\Big) \tag{3.3.52}$$

Il $\sin^2$ al numeratore oscilla più velocemente di quello al denominatore, così che

- Quando si annulla il denominatore si annulla anche il numeratore e il termine di interferenza è massimo e vale 1. Questo avviene per $\sin\theta_n \sim \theta_n = n\frac{\lambda}{b}$.
- Tra questi massimi ci sono $N-1$ minimi di intensità in cui si annulla solo il numeratore, in $\sin\theta_n^m \sim \theta_n^m = \frac{\lambda}{b}(n+\frac{m}{N})$.

La larghezza del massimo $n - esimo$ è

$$\theta_n^1 - \theta_n^{-1} = \frac{\lambda}{b}\frac{2}{N} \tag{3.3.53}$$

Ora metabolizza questo:

- Tra due minimi c'è un massimo
- Tra due massimi primari di interferenza ci sono $N-1$ minimi
- Pertanto, tra due massimi primari di interferenza ci sono $N-2$ massimi

La figura di diffrazione è più larga di quella di interferenza perché $a < b$.

Se $b = ka, k \in \mathbb{Z}$, i massimi di interferenza di ordine kn ($\theta_{kn} = n\frac{\lambda}{a}$) coincidono con i minimi di diffrazione e sono soppressi.

Un reticolo può essere usato per risolvere lunghezze d'onda molto strette.

Secondo il criterio di Rayleigh, il reticolo risolve due lunghezze d'onda all'ordine n se i massimi delle due lunghezze d'onda distano almeno quanto il primo minimo di quella più piccola:

$$n\frac{\lambda+\delta\lambda}{b} > \frac{\lambda}{b}\Big(n+\frac{1}{N}\Big) \tag{3.3.54}$$

$$Nn > \frac{\lambda}{\delta\lambda} \tag{3.3.55}$$

Per esempio per distinguere al primo ordine le due righe della luce gialla del sodio (le righe di Fraunhofer D_1 e D_2), con $\lambda \sim 600$ nm,$\delta\lambda \sim 0.6$ nm, il reticolo deve avere almeno 1000 fenditure.

3.4 Polarizzazione della luce

Il campo elettrico di un onda piana che propaga lungo l'asse delle z è

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{A}}{2} e^{i(kz-\omega t)} + c.c. \tag{3.4.1}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x e^{i\phi_x} \\ A_y e^{i\phi_y} \end{pmatrix}_{xy} \tag{3.4.2}$$

$$= \begin{pmatrix} A_x \\ A_y e^{i\phi} \end{pmatrix}_{xy} \tag{3.4.3}$$

$$\phi = \phi_x - \phi_y \tag{3.4.4}$$

L'intensità media dell'onda è:

$$\langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{2}(A_x^2 + A_y^2) \tag{3.4.5}$$

Con una bellissima scelta di notazione possiamo scrivere un vettore reale di modulo $B = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ e angolo θ:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \tag{3.4.6}$$

Così che

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \cos(\omega t) \\ A_y \cos(\omega t - \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \cos\theta \cos(\omega t) \\ B \sin\theta \cos(\omega t - \phi) \end{pmatrix} \tag{3.4.7}$$

- $\phi = 0$: le due componenti del campo oscillano in fase. La punta del vettore oscilla con inclinazione θ.
- $\phi = \pi$: le due componenti del campo oscillano in antifase. La punta del vettore oscilla con inclinazione $-\theta$.
- $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$: la traiettoria della punta è $\frac{E_x^2}{A_x^2} + \frac{E_y^2}{A_y^2} = 1$, un'ellisse dove il vettore che collega due vertici adiacenti è inclinato di θ. In particolare per $\theta = \frac{\pi}{4}$ la traiettoria è una circonferenza.
- Se ϕ è diverso la traiettoria è un'ellisse inclinata.

Se l'onda è polarizzata circolarmente ($\phi = \pm\pi/2, \theta = \pi/4$) possiamo scrivere

$$\mathbf{A} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}_{xy} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\pm} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\pm} \end{cases} \tag{3.4.8}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{\pm} = \frac{\hat{\mathbf{e}}_x \pm \hat{\mathbf{e}}_y}{\sqrt{2}} \tag{3.4.9}$$

Si verifica che la nuova base è ortornormale
Le relazioni tra le componenti di $\mathbf{E}$ sulle basi xy e $\pm$ sono:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}_{xy} = \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix}_{\pm} \tag{3.4.10}$$

$$= \frac{A_+}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}_{xy} + \frac{A_-}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}_{xy} \tag{3.4.11}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{A_+ + A_-}{\sqrt{2}} \\ i\frac{A_+ - A_-}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_{xy} \tag{3.4.12}$$

da cui confrontando

$$A_x = \frac{A_+ + A_-}{\sqrt{2}} \tag{3.4.13}$$

$$A_y = i\frac{A_+ - A_-}{\sqrt{2}} \tag{3.4.14}$$

$$A_{\pm} = \frac{A_x \mp A_y}{\sqrt{2}} \tag{3.4.15}$$

3.4.1 Parametri di Stokes

Sono parametri facilmente ricavabili sperimentalmente usando polarizzatori e lamine a quarto d'onda.

Si definiscono a partire dai coefficienti circolari di $\mathbf{A}$:

$$s_0 = |A_+|^2 + |A_-|^2 \tag{3.4.16}$$

$$s_1 = 2\Re(A_+^* A_-) \tag{3.4.17}$$

$$s_2 = 2\Im(A_+^* A_-) \tag{3.4.18}$$

$$s_3 = |A_+|^2 - |A_-|^2 \tag{3.4.19}$$

Si può dimostrare che sulla base cartesiana corrispondono a:

$$s_0 = |A_x|^2 + |A_y|^2 \tag{3.4.20}$$
$$s_1 = |A_x|^2 - |A_y|^2 \tag{3.4.21}$$
$$s_2 = 2\Re(A_x^* A_y) \tag{3.4.22}$$
$$s_3 = 2\Im(A_x^* A_y) \tag{3.4.23}$$

A questo punto è molto astuto scegliere come parametri

$$A_+ = C\cos(\frac{\pi}{4} - \chi)e^{-i\psi} \tag{3.4.24}$$
$$A_- = C\sin(\frac{\pi}{4} - \chi)e^{i\psi} \tag{3.4.25}$$

così che i parametri di Stokes diventano coordinate sferiche:

$$s_0 = C^2 \tag{3.4.26}$$
$$s_1 = C^2\cos(2\chi)\cos(2\psi) \tag{3.4.27}$$
$$s_2 = C^2\cos(2\chi)\sin(2\psi) \tag{3.4.28}$$
$$s_3 = C^2\sin(2\chi) \tag{3.4.29}$$

dove 2χ è l'angolo verticale e 2ψ quello orizzontale.
In componenti cartesiane:

$$s_0 = C^2 \tag{3.4.30}$$
$$s_1 = C^2\cos(2\theta) \tag{3.4.31}$$
$$s_2 = C^2\sin(2\theta)\cos(\phi) \tag{3.4.32}$$
$$s_3 = C^2\sin(2\theta)\sin(\phi) \tag{3.4.33}$$

Bonfrontando le espressioni per s_0 nelle componenti cartesiane deduciamo che in fondo $C = B$, quindi d'ora in poi useremo la notazione B.

La polarizzazione è:

- al polo nord ($\chi = \frac{\pi}{4}$) circolare positiva
- al polo sud ($\chi = -\frac{\pi}{4}$) circolare negativa
- Sull'equatore ($\chi = 0$) la polarizzazione è lineare con inclinazione ψ

Per trovare le relazioni tra χ e ψ e le componenti cartesiane di A usiamo la notazione:

$$A_+ = B_+ e^{-i\psi} \tag{3.4.34}$$
$$A_- = B_- e^{i\psi} \tag{3.4.35}$$

così che

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix} \tag{3.4.36}$$

Quindi il campo $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{A}}{2} e^{i(kz-\omega t)} + c.c.$ in $z = 0$ si scrive come

$$E_x = D_+ \cos\psi \cos(\omega t) - D_- \sin\psi \sin(\omega t) \tag{3.4.37}$$
$$E_y = D_+ \sin\psi \cos(\omega t) + D_- \cos\psi \sin(\omega t) \tag{3.4.38}$$

quindi ricavando $\cos(\omega t)$ e $\sin(\omega t)$ e scrivendo l'identità trigonometrica $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\cos(\omega t) = \frac{E_x \cos\psi + E_y \sin\psi}{D_+} = \frac{F_x}{D_+} \tag{3.4.39}$$
$$\sin(\omega t) = \frac{E_y \cos\psi - E_x \sin\psi}{D_-} = \frac{F_y}{D_-} \tag{3.4.40}$$
$$\frac{F_x^2}{D_+^2} + \frac{F_y^2}{D_-^2} = 1 \tag{3.4.41}$$

dove $\mathbf{F}$ è $\mathbf{E}$ ruotato di $-\phi$.
Inoltre abbiamo

$$D_+ = B_+ \cos\chi \tag{3.4.42}$$
$$D_- = B_- \sin\chi \tag{3.4.43}$$

In termini di parametri di Stokes possiamo scrivere:

$$\psi = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{s_2}{s_1}\right) \tag{3.4.44}$$
$$D_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{s_0 \pm \sqrt{s_0^2 - s_3^2}} \tag{3.4.45}$$

mentre con gli angoli "cartesiani":

$$\psi = \frac{1}{2}\arctan[\tan(2\theta)\cos\phi] \tag{3.4.46}$$
$$D_\pm = \frac{B}{2}\sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \sin^2(2\theta)\sin^2\phi}} \tag{3.4.47}$$

Prati	**danivolo**	*Definizione*
$\mathbf{E}$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{A}e^{i(kz-\omega t)}/2 + c.c.$
$\mathbf{E}_0^c$	$\mathbf{A}$	$\left(A_x e^{i\phi_x} \quad A_y e^{i\phi_y}\right)_{xy}$
$\mathbf{E}_0$	$\mathbf{B}$	$A_x = B\cos\theta$
$\mathbf{E}_0$ (Stokes)	$C(=B)$	$A_+ = C\cos(\pi/4 - \chi)$
$E_{0\pm}$	$B_\pm$	$A_\pm = B_\pm e^{\mp i\psi}$
$A_\pm$	$D_\pm$	$(B_+ \pm B_-)/\sqrt{2}$
$\mathbf{E}'$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{E}$ ruotato di $-\phi$